



3 1761 06240139 3

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME DOUZIÈME

TRAVAUX DE MATHÉMATIQUES PURES

1652—1656



LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF

1910

5965-4
2/5/11

Q
113
1137
1233
712

TRAVAUX DE MATHÉMATIQUES PURES

1652 1656.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE
1652 ET 1653.
PROBLÈMES PLANS ET SOLIDES.
MAXIMA ET MINIMA.



Avertissement.

En janvier 1652 Huygens commença à s'occuper assidûment de problèmes solides, c'est-à-dire de ceux dont l'analyse algébrique amène des équations du troisième ou quatrième degré; problèmes devant lesquels il s'était arrêté jusqu'alors quand il les avait rencontrés.¹⁾ Le point de départ de ces nouvelles recherches, comme de tant d'autres,²⁾ lui est fourni par Archimède. Il s'agit cette fois du problème de couper une sphère par un plan dans un rapport donné. Dans son ouvrage „De sphaera et cylindro”³⁾ Archimède n'en avait pas achevé la solution; il l'avait seulement réduit à un problème plus simple qui demande de couper une droite de longueur donnée en deux segments sous des conditions qui font reconnaître le problème comme solide.⁴⁾ Il est vrai qu' Eutocius dans ses Commentaires sur Archimède en avait rapporté trois solutions différentes;⁵⁾ mais elles exigent la détermination de l'intersection d'une hyperbole avec une ellipse

¹⁾ Comparez, au Tome XI, les pages 33 (Problème 7), 88 et 213.

²⁾ Comparez les pages 50, 76, 83, 273 et 274 du Tome XI.

³⁾ Voir les pages 210—219, T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du T. XI ou les pages 45—47 de l'édition de Bâle, citée dans la note 3, p. 274 du T. XI.

⁴⁾ Voir la note 16, p. 12 du Tome présent.

⁵⁾ Voir, à la même page, les notes 15 et 17.

ou une parabole. Or, Descartes dans sa „Géométrie”⁶⁾ avait montré qu'on pouvait réduire chaque problème solide à celui de trouver l'intersection d'une parabole avec un cercle. C'est ce que Huygens va accomplir, pour le problème en question, dans la pièce N°. I.⁷⁾ Le même mois, d'ailleurs, il en élabora une seconde solution,⁸⁾ basée cette fois sur la trisection de l'angle, parce qu'il considérait ces sortes de constructions, là où elles sont possibles, comme les plus simples et les plus pratiques pour les problèmes solides.⁹⁾ C'est cette seconde solution qui, sous une forme un peu modifiée, a passé dans les „*Illustrium quorundam problematum constructiones*” de 1654.¹⁰⁾

Les analyses qui ont conduit à ces solutions nous sont inconnues. Sans doute Huygens a commencé par déduire algébriquement l'équation cubique dont le problème dépend; il a appliqué ensuite les règles données par Descartes, au Livre III de sa „Géométrie”, pour résoudre une telle équation par l'intersection d'une parabole avec un cercle ou par la trisection de l'angle; adaptant toutefois ces constructions autant que possible au problème à résoudre de manière à économiser sur les lignes à tirer.¹¹⁾

Le second problème solide traité par Huygens, est celui des deux moyennes proportionnelles. L'antiquité en connaissait plusieurs solutions qui nous ont été conservées. Parmi elles celle de Nicomède, fondée sur l'emploi de la conchoïde, semble avoir frappé particulièrement Huygens. En effet, dès qu'on se demande de quelle manière Nicomède a pu parvenir à cette solution, elle nous apparaît comme une véritable énigme. Il est clair, d'abord, que la détermination des points d'intersection d'une droite avec une conchoïde doit mener en général à une équation du quatrième degré. Or, dans la solution de Nicomède, le pôle et la base de la conchoïde sont placés de telle façon que l'un des quatre points d'intersection qui

⁶⁾ Voir l'article: „Façon generale pour construire tous les problemes solides, reduits à une Equation de trois ou quatre dimensions,” p. 464—469 du T. VI de l'édition récente des Œuvres de Descartes par Adam et Tannery.

⁷⁾ Voir la page 9.

⁸⁾ Voir la pièce N°. III, p. 16.

⁹⁾ Comparez la première page de l'„*Illustrium quorundam problematum constructiones*,” où on lit: „Et hæc construendi ratio in solidis problematis quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maximè accommodata.” Les règles pour réduire les problèmes solides, qui en sont capables, à la trisection de l'angle avaient été données également par Descartes dans sa „Géométrie.” Voir les pages 472—474, Tome VI de l'édition d'Adam et Tannery.

¹⁰⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 1, p. 287 du T. I.

¹¹⁾ Comparez surtout la solution du problème de la pièce N°. XX, p. 83—86 du Tome présent où l'on peut suivre facilement le procédé que nous venons de décrire.

correspondent aux racines de cette équation bi-quadratique est construisible à l'aide de la seule règle et que de plus l'équation cubique, qui reste, se réduit à la forme binomiale. ¹²⁾ Mais comment Nicomède a-t-il pu réussir à remplir ces conditions, indispensables au succès de sa solution? Huygens croit l'avoir deviné et il nous expose ses idées là-dessus dans la pièce N°. II, du 30 janvier 1652. ¹³⁾ Il y suppose implicitement que l'antiquité était en possession d'une analyse algébrique qui ressemblait à la nôtre; opinion qu'il a exprimée formellement dans une lettre à Kinner à Löwenthorn du 9 août 1652 ¹⁴⁾ et qui fut partagée par d'autres savants de son époque. ¹⁵⁾

Ayant si bien réussi, dans cette pièce N°. II, à retrouver la solution de Nicomède en la considérant comme une solution particulière du problème plus général de mener par un point donné une droite de manière que deux droites, données en position, en découpent un segment de longueur donnée, Huygens se met à rechercher les cas où ce problème devient plan, c'est-à-dire résoluble à l'aide de la règle et du compas. ¹⁶⁾ De cette façon il obtient aisément les cas particuliers mentionnés par Pappus ¹⁷⁾ et dont il s'était déjà occupé en 1650, ¹⁸⁾ dans lesquels le point donné est situé sur une des bissectrices des angles formés par les droites données. Il les reprend et en trouve de nouvelles solutions, ¹⁹⁾ reproduites

¹²⁾ Voir la figure 2 de la pièce N°. II, p. 15, où il s'agit de construire les deux moyennes entre LA et LG. Le point B y est le pôle, la droite AD la base de la conchoïde qui coupe la droite donnée CA au point E. Le pôle a été construit en prenant $AR = \frac{1}{2} AL = \frac{1}{4} AC$, $AB = DE = \frac{1}{2} LG$; la base en menant AD parallèle à CB. La solution parasitaire s'obtient en tirant la droite BL.

¹³⁾ Voir les pages 13—15 du Tome présent.

¹⁴⁾ Voir la page 237 du T. I, où on lit à propos de l'analyse algébrique „restituée” par Descartes „nam talem quoque veteribus Geometris in usu fuisse certissimis mihi indicijis constat.”

¹⁵⁾ Témoïn la préface du „Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico”, ouvrage posthume de Frans van Schooten (voir la note 1, p. 41 du T. III), publié par son frère Pieter, où celui-ci s'exprime comme il suit: „meus Frater, postquam methodo Synthetica scientiae hujus praeclara multa publicis tam scriptis quam praelectionibus cum fructu tradidisset, ad Analysis quoque, certissimam inveniendi artem, ejusque perficiendae rationem sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quae Veteribus tantum gloriae peperissent, Analysis beneficio ac ope reperta essent: sed quae illi ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio & suppresso, vulgari tantum Syntheseos forma exhibuissent.”

¹⁶⁾ Voir la pièce N°. VI, p. 26—27.

¹⁷⁾ Dans son aperçu de l'ouvrage „De inclinationibus” d'Apollonius, au lieu cité dans la note 2, p. 239 du T. XI.

¹⁸⁾ Voir les pièces N°. IV et VIII, pp. 226 et 239 du T. XI.

¹⁹⁾ Voir les pièces N°. IV, VI, VII, IX et XIII aux pages 20, 28, 34, 44, 57 et 58 du Tome présent.

pour la plupart dans les „*Illustrium quorundam problematum constructiones*.”

Ensuite, dans la pièce N°. VIII ²⁰⁾, du 14 février 1652, Huygens revient au cas général où le point donné occupe une position quelconque à l'intérieur de l'angle qui doit contenir le segment donné. Il en obtient une solution qui dépend de l'intersection d'une hyperbole et d'un cercle et se met ensuite à rechercher ce qu'on appelait alors la „determinatio” du problème, c'est-à-dire l'ensemble des conditions sous lesquelles la solution est possible. Cette „determinatio” exige ici la construction du plus petit segment que, dans l'angle donné, on puisse faire passer par le point donné; ce qui constitue un nouveau problème solide dont Huygens donne trois solutions diverses et qu'il reprend en septembre de la même année ²¹⁾ pour le traiter systématiquement par sa règle „de maximis et minimis” qui est une modification de celle de Fermat. ²²⁾ A cette occasion il expose amplement les principes qui conduisent à cette règle.

En attendant, en mars 1652, il était retourné au problème des deux moyennes proportionnelles. Après avoir donné, pour le cas particulier de la duplication du cube, dans la pièce N°. X ²³⁾ une première solution, dont l'analyse nous est inconnue, accompagnée d'une construction approximative élégante, il va procéder plus systématiquement par la méthode qui, selon lui, a amené la solution de Nicomède; c'est-à-dire il se pose des problèmes dans lesquels il s'agit d'obtenir l'égalité de deux segments dont l'un est situé sur une droite mobile, passant par un point donné, et l'autre sur une droite fixe; ²⁴⁾ il soumet ces problèmes à une analyse algébrique conduisant à une équation cubique ou biquadratique; après quoi il choisit les données du problème de manière à simplifier cette équation jusqu'à ce qu'elle se réduise à une équation cubique binomiale. Alors, pourvu qu'on suppose accomplie l'égalification des deux segments, il est en possession d'une solution nouvelle du problème des deux moyennes.

Les solutions obtenues de cette façon ont passé dans les „*Illustrium quorundam problematum constructiones*”, ²⁵⁾ mais sans les analyses et sous des rédactions modifiées.

Ensuite, après un intervalle de plusieurs mois, pendant lesquels Huygens a

²⁰⁾ Voir les pages 38—41 du Tome présent.

²¹⁾ Voir la pièce N°. XIV, p. 66—68 du Tome présent.

²²⁾ Consulter le § 11 de la page 19 du T. XI et la note 11, p. 48 du même Tome.

²³⁾ Voir la p. 45 du Tome présent.

²⁴⁾ Voir les débuts des pièces N°. XI et N°. XII, pp. 49 et 54 du Tome présent.

²⁵⁾ Comme „*Probl. III*”.

commencé ses recherches sur la dioptrique ²⁶⁾ et posé les bases de sa théorie de la percussion des corps durs, ²⁷⁾ il aborde en septembre 1653 deux autres problèmes solides; en premier lieu celui des normales à abaïffer d'un point donné sur une parabole donnée, problème dont Apollonius s'était occupé au cinquième livre de ses „Coniques”. Par la méthode esquissée au second alinéa du présent „Avertissement” Huygens parvient à résoudre ce problème à l'aide des intersections d'un cercle avec la parabole même qui est donnée. ²⁸⁾ Alors il se pose la question si une telle solution où il n'entre d'autres courbes que le cercle et la courbe qu'on estime connue, doit être comptée comme plane ou comme solide. Huygens incline vers la première interprétation et il croit pouvoir expliquer de cette façon un passage où Pappus reproche à Apollonius, qui s'était servi d'une hyperbole pour la résolution du problème en question, d'avoir employé une conique dans la solution d'un problème plan. ²⁹⁾

Le dernier problème solide ³⁰⁾ résolu par Huygens dans la période qui nous occupe, est celui de la détermination du point d'inflexion de la conchoïde de Nicomède. Il le réduit d'abord à une question „de maximis et minimis,” à laquelle il applique la méthode exposée dans la pièce N°. XIV; ce qui amène une équation cubique résoluble, comme toujours, à l'aide d'un cercle et d'une parabole et, entre certaines limites des données, par la trisection de l'angle. Dans ce dernier cas Huygens a cru, au premier abord, qu'on pourrait se servir, pour la trisection de l'angle en question de la conchoïde même qu'on suppose donnée. ³¹⁾ Alors, comme nous l'avons vu, le problème se rangerait, selon lui, parmi les problèmes plans; mais il semble qu'il ait abandonné bientôt cette pensée. ³²⁾ Une remarque, qui, dans la pièce N°. XX y donnait expression, est supprimée dans les „*Illustrum quorundam problematum solutiones*” où le problème apparaît comme „*Problema VIII.*”

C'est ici la partie principale de l'œuvre purement mathématique des années 1652

²⁶⁾ Comparez la note 17, p. 91 du T. XI.

²⁷⁾ On trouvera ces travaux sur la dioptrique et sur la percussion dans d'autres volumes de la présente publication.

²⁸⁾ Voir la pièce N°. XIX. p. 81 du Tome présent.

²⁹⁾ Voir, pour ce passage, la note 5, p. 82 du Tome présent.

³⁰⁾ Voir la pièce N°. XX, p. 83.

³¹⁾ Voir le dernier alinéa de la page 86 du Tome présent.

³²⁾ Voir la note 10 de la page citée.

et 1655 pour autant qu'elle nous a été conservée. Nous n'y avons à ajouter que les pièces N^o. V, XV, XVI, XVII, XVIII et XXI dont nous n'avons pas encore parlé.

La première de ces pièces, le N^o. V, ³³⁾ a, évidemment, été composée par Huygens pour se faciliter la rédaction, à la mode des anciens, des démonstrations et constructions auxquelles il avait été conduit par l'analyse algébrique, et le N^o. XVI ³⁴⁾ peut être considéré comme un exemple de l'application à un problème plan déterminé des règles exposées dans le N^o. V.

Le N^o. XV ³⁵⁾ donne une déduction algébrique de la formule célèbre de Héron qui exprime l'aire d'un triangle en fonction des côtés.

Les pièces N^o. XVII ³⁶⁾ et N^o. XVIII ³⁷⁾ contiennent la détermination de la tangente à la cissoïde et à la conchoïde dans le cas du point de rebroussement. Comme la méthode de Descartes ³⁸⁾ y est employée, cette détermination se réduit à une question „de maximis et minimis” traitable par les méthodes exposées dans la pièce N^o. XIV.

Enfin le N^o. XXI ³⁹⁾ applique au triangle une méthode inventée par van Schooten pour déterminer les centres de gravité de certaines figures simples.



³³⁾ Voir les pages 21—25 du Tome présent

³⁴⁾ Voir les pages 72—75.

³⁵⁾ Voir les pages 60—71.

³⁶⁾ Voir les pages 76—78.

³⁷⁾ Voir les pages 79—80.

³⁸⁾ Voir la note 10, p. 65.

³⁹⁾ Voir les pages 87—89.

Quod autem circumferentia FG parabolam secabit inter verticis punctum F et punctum H in quo BH perpendicularis ad FB, occurrit parabola, hoc inde manifestum fiet. Jungantur EH, HC. Quoniam igitur FB aequalis est lateri recto parabola FGH, erit necessario etiam BH aequalis FB vel MC quare CH parallela et aequalis BM. Est autem quadr. EF aequale istis simul quadrato FM, hoc est quatuor quadr. is MH⁵⁾ et qu.° ME. at qu. EH aequale est istis qu. is ex EC et CH, hoc est duobus qu. is MH⁵⁾ una cum qu.° ME et duobus rectangulis EMC, ergo quia hinc duo rect. la EMC minora sunt duobus istinc quadratis MH⁵⁾, et reliqua utrinque communia, apparet quadr. EH minus esse qu.° EF; itaque punctum H intra circumferentiam cadet FG; sed eadem circumf. FG ad verticem F necessario ingressa est parabolam FGH, ergo eandem hanc secabit inter puncta F et H: quod erat primò ostendendum.

Fiat nunc sicut CM at MN potentia, ita MN ad NO longitudine, ⁶⁾ ponaturque OQ aequalis duplae MN. Jungantur deinde MK, ML atque item EG, et sit GP perpend. ad FB. Quia igitur aequales sunt EF, EG aequalia quoque erunt earum quadrata, ergo quadrata FM et ME simul aequalia quadratis GN, NE. quadr. i autem FM excessus super quadr. GN, aequatur duobus rectang. is PFM, hoc est, quatuor quadratis ex PG, minus qua.° PF. ⁷⁾ Sed quadratum EM deficit à qu.° EN duplo rectangulo EMN et qu.° MN. ergo cum hic defectus isti excessus aequalis sit necessariò ⁸⁾, erit duplum \square EMN una cum qu.° MN aequale quatuor qu. is PG five 4 \square is MN minus qu.° PF. et ablato utrinque qu.° MN, erit duplum \square EMN aequale tribus qu. is MN minus qu.° PF, ideoque qu. PF aequale excessui trium qu. orum MN super duplo \square ° EMN. Quia autem ut FB, quae aequalis est lateri recto parabola, ad PG, ita haec ad PF, erit quoque ut qu. FB ad qu. PG, five ut qu. CM ad qu. MN, hoc est ut MN linea ad NO, ita qu. PG. ad qu. PF, hoc est ad excessum trium qu. orum MN super duplo \square EMN. sed ut qu. PG seu qu. MN ad dictum excessum qui aequatur \square ° sub MN et sub eo quo tripla MN excedit

Lettre N°. 118 et la pièce N°. 119, p. 172 du T. I. Comme Huygens en fait la remarque dans sa lettre, Grégoire s'était occupé autrefois du même problème. En effet, aux pages 1021—1022 de son grand ouvrage, cité dans la note 6, p. 53, T. I, celui-ci, sans arriver à une solution proprement dite, avait montré qu'on pouvait réduire le problème à celui de couper un segment de parabole dans le rapport donné par une droite parallèle à l'axe de la parabole; ce qui d'ailleurs est très évident et n'avance guère la solution.

⁵⁾ Lisez: MC.

⁶⁾ C'est-à-dire $CM^2 : MN^2 = MN : NO$.

⁷⁾ On a, en effet, $FM^2 - GN^2 = (FM - GN)(FM + GN) = PF(2 FM - PF) = 2 PF \times FM - PF^2 = 4 BF \times FP - PF^2$; où $BF \times FP = PG^2$, puisque BF est le „latus rectum” de la parabole.

⁸⁾ Huygens ajoute ici en marge „hoc melius paulo ante”; ce qui veut dire: de suite après la phrase „FM et ME simul aequalia quadratis GN, NE.”

duplam EM, ita est MN ad id ipsum quo tripla MN excedit duplam EM; ergo quoque ut MN ad NO ita eadem MN ad $\frac{5}{2}$ MN minus 2EM, aequalis est igitur excessus triplae MN super dupla EM ipsi NO ideoque tripla MN ablato NO, hoc est MQ (est enim OQ ex constr. aequalis duabus MN) aequabitur duplae EM.

Porro quoniam qu. CM. seu qu. KM est ad qu. MN ut MN linea ad NO,⁹⁾ erit quoque per conversionem rationis qu. KM cui aequale qu MB, ad qu. KN ut MN ad MO. sed ut qu. BM ad qu. KN, ita est circulus circa diametrum BD ad circulum circa KL diametrum, ergo conus basin habens circulum circa BD et altitudinem MO aequalis est cono KML.^{a 10)} Est autem dimidia sphaera BCD, cui aequalis conus basin habens circulum circa BD et altitudinem AC, ad conum dictum basin eundem habentem circulum circa BD, et altitudinem MO, ut AC ad MO: ergo dimidia sphaera BCD est quoque ad conum KML ut AC ad MO. Sed eadem dimidia sphaera est ad partem solidi BKLD, quae remanet dempto cono KML, ut eadem AC ad OQ, (est enim dicta semisphaera ad sectorem solidum MKCL sicut superficies sphaerica BCD ad superficiem KCL^{b 11)}), hoc est ut rectangulum ACM ad rectangulum ACN^{c 12)}, five ut MC ad CN, ac proinde per conversionem rationis quoque semisphaera BCD ad dictam partem solidi BKLD quae remanet dempto cono KML ut CM ad MN five ut AC ad duplam MN quae est OQ). Ergo semisphaera BCD erit ad totam partem solidam BKLD ut AC ad totam MQ,^{d 13)} quae aequalis duplae EM offensa

⁹⁾ Par construction.

¹⁰⁾ *a*, 15. 12. Elem." [Huygens]. Voici cette „Prop. 15" du „Lib. 12" des „Elementa" d'Euclide dans l'édition de Clavius citée dans la note 6, p. 477, T. I: „Aequalium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt aequales." (Clavius, p. 480).

¹¹⁾ „*b* ultima lib. 1. Archim." [Huygens]. „Cuiusque portioni sphaerae aequatur conus ille, qui basin habeat aequalem superficiei sectionis sphaerae, quae secundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero aequalem sphaerae semidiametro." Voir p. 40 de l'édition de Bâle citée p. 137 du T. I note 1 ou celle de Heiberg T. I, p. 181; citée p. 50 du T. XI, note 2.

¹²⁾ „*c* 40. lib. 1. Archim." [Huygens]. „Superficies cuiusque portionis sphaerae, quae quidem portio sit dimidia sphaera minor, aequalis est circulo, cuius semidiametros aequatur lineae illi, quae à vertice portionis ad circumferentiam circuli ducta sit, qui circulus portionis est basis." (p. 39 de l'édition de Bâle, où elle se trouve, en effet, sous le numéro 40; chez Heiberg, page 177 du T. I, elle porte le numéro 42.)

¹³⁾ *d* 24.5. Elem. potuerunt tamen melius rationes disponi." [Huygens]. Voir la note 28 de la page 312 du Tome XI. Pour appliquer la proposition, considérons les proportions suivantes:

conus KML : dimidia sphaera BCD = MO : AC
 portio BKLD — conus KML : dimidia sphaera BCD = OQ : AC;
 ce qui amène par la proposition citée:
 portio BKLD : dimidia sphaera BCD = MQ : AC;

fuit, ¹⁴⁾ hoc est, ut AM ad ME. Quare et per conversionem rationis, erit semisphaera BCD ad portionem KCL ut MA ad AE. ideoque tota sphaera ABCD ad dictam portionem KCL ut AC ad AE, et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut CE ad EA: quod erat demonstrandum.

Idem problema composuit dionysidorus ope parabolae simul et hyperbolae. Diocles per ellipsis et hyperbolen. ¹⁵⁾ Ipse vero Archimedes constructionem non dedit, ¹⁶⁾ nisi ea fortassis ipsius est quam Eutocius in vetusto libro se reperisse testatur; ¹⁷⁾ quae similis dionysidori, nam per hyperbolam item et parabolam absolvitur.



proportion identique avec celle du texte, à part l'ordre des termes que nous avons dû changer aussi dans les deux autres proportions pour pouvoir appliquer la proposition d'Euclide.

¹⁴⁾ Voir la fin de l'alinéa précédent.

¹⁵⁾ On rencontre ces solutions de Dionysidore et de Dioclès dans les Commentaires d'Eutocius sur l'ouvrage d'Archimède „De sphaera et cylindro”; voir les p. 37—42 de l'édition de Bale. (Heiberg, p. 180—209 du T. III.)

¹⁶⁾ La solution avait été réduite par Archimède à celle du problème suivant: „datis duabus lineis BΔ et BZ, quarum BΔ duplo maior est linea BZ, et puncto Θ in linea BZ, lineam ΔB in puncto X ita secare, ut fiat BΔ² : ΔX² = XZ : ZΘ.”

(Heiberg, T. I, p. 215; p. 46 de l'édition de Bale). Posant BΔ = a, ΔZ = b, ZΘ = c, ΔX = x, ce problème se réduit à la solution de l'équation cubique a² : x² = (b - x) : c.

¹⁷⁾ Le passage cité dans la note précédente est suivi par la phrase „quorum utrumque in line et resolutur et componetur.” Toutefois cette résolution et composition manquent dans l'œuvre authentique d'Archimède. Or, Eutocius croit les avoir retrouvées dans un vieux manuscrit qu'il reproduit dans ses Commentaires (voir Heiberg, T. III, p. 152 — 179; p. 32 — 37 de l'édition de Bale).

$$\begin{aligned}
 aa + 2ax + xx + bb - aacc - 2accx - cxx &= 2a + 2x \quad \text{xx} \quad \propto d \text{ CR} \\
 aa + 2ax + xx + bb - \frac{aacc - 2accx - cxx}{xx} &\propto 2ad + 2dx \\
 x^4 + 2ax^3 + bb &\left. \begin{array}{l} - 2d \\ + aa \\ - cc \\ - 2ad \end{array} \right\} \text{xx} \quad - 2accx - aacc \propto 0
 \end{aligned}$$

Hic animadvertit Nicomedes,³⁾ si $bb + aa$ esset $\propto cc + 2ad$ tunc tertium terminum evanescere: tunc autem $\frac{bb + aa - cc}{2a} \propto d$. Sed ad hoc obtinendum oportet ut AB ponatur aequalis datae DE $\propto c$; tunc enim in \triangle^o CBA erit segmentum basis CR $\propto \frac{bb + aa - cc}{2a}$.

Ablato sic tertio termino, ductoque $\frac{bb + aa - cc}{a}$ in x^3 , loco $2d$, manet ipsi haec aequatio.

$$\left. \begin{array}{l} x^4 + ax^3 - bb \\ + \frac{cc}{a} \end{array} \right\} x^3 - 2accx - aacc \propto 0$$

Hic vidit⁴⁾ $2accx + aacc$ dividi posse per $x + \frac{1}{2}a$ fierique tunc $2ac^2$ si igitur id quod in x^3 ductum est aequale esset $\frac{1}{2}a$, tunc etiam

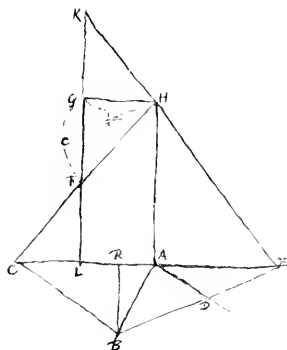
$$\left. \begin{array}{l} x^4 + aa \\ - bb \\ + cc \end{array} \right\} \frac{1}{a} \quad x^3 \text{ dividi posset per } x + \frac{1}{2}a \text{ fieretque } x^3 \text{ quotiens.}$$

56 verso — 57 recto de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 de notre T. II). On la retrouve encore dans les Commentaires d'Eutocius sur le „Liber II” de l'ouvrage d'Archimède. „De sphaera et cylindro”; voir les p. 26—27 de l'édition de Bale (Heiberg. T. III, p. 122—127).

³⁾ Bien entendu Huygens suppose que Nicomède soit arrivé par cette voie à sa construction. En effet, on n'en trouve rien aux lieux cités dans la note précédente, où Nicomède égale AB à DE par construction sans le motiver d'aucune façon.

⁴⁾ D'après la supposition de Huygens.

[Fig. 2.]



$$\text{fecit igitur } \frac{aa - bb + cc}{a} \propto \frac{1}{2}a$$

$$aa - bb + cc \propto \frac{1}{2}aa$$

$$bb \propto \frac{1}{2}aa + cc$$

$$\text{sed } d \text{ erat } \propto \frac{bb + aa - cc}{2a} \text{ quod nunc erit}$$

$$\frac{1}{2}aa + cc + \frac{aa - cc}{2a} \text{ sive } \frac{3}{4}a, \text{ ergo } d \propto \frac{3}{4}a.$$

Ponendo igitur $AB \propto DE$ et $CR \propto \frac{3}{4}CA$ habet hanc aequationem.

$$x^4 + \frac{1}{2}ax^3 - 2accx - aacc \propto 0$$

$$\text{dividendo per } x + \frac{1}{2}a \text{ fit } x^3 - 2acc \propto 0$$

$$x^3 \propto 2acc$$

$$x \propto \sqrt[3]{2acc}.$$

Est autem $\sqrt[3]{2acc}$ secunda duarum mediarum proportionalium inter c et $2a$, vel etiam inter $2c$ et $\frac{1}{2}a$. atque hoc posterius delegit Nicomedes in sua constructione.

COMPOSITIO NICOMEDIS.

AC ⁵⁾ dupla AL , AR dimidia AL . RB perpend. LA . $AB \propto GF$ vel FL . Junctae CB parallela AD . BDE linea ope Conchoïdis ducta ita ut intercepta DE fit $\propto AB$, vel GF .

Continue prop.^{les} sunt HA , AE , KG , GH . ⁶⁾

⁵⁾ Voir la figure 2, qui correspond exactement avec celles de Pappus et d'Eutocius aux lieux cités dans la note 2.

⁶⁾ En effet, posant $HA = 2c$, $GH = \frac{1}{2}a$ (donc $AB = c$, $AR = \frac{1}{4}a$, $CR = \frac{3}{4}a$) on a d'après l'analyse qui précède : $AE = x$ (voir aussi la fig. 1) $= \sqrt[3]{2acc} = \sqrt[3]{(2c)^2 \times \frac{1}{2}a}$; ensuite $KG = HA \times GH : AE = \frac{2c \times \frac{1}{2}a^2}{\sqrt[3]{2acc}} = \sqrt[3]{(2c) \times (\frac{1}{2}a)^2}$. Il est curieux de remarquer le rôle de la racine éliminée $x = -\frac{1}{2}a$. Elle correspond à une solution parasitaire qu'on obtient en tirant la droite BL . Ainsi le point L appartient à la seconde branche de la conchoïde.

Quia autem EN est excessus ipsius EM supra NM, manifestum est, id quo dupla EM hoc est quo QM excedit duplam NM aequari duplae EN hoc est ipsi OM. Itaque dupla NM addita ad OM aequatur ipsi QM, ac proinde erit dupla NM aequalis OQ. Ergo duae simul OQ et NM aequales triplae NM. Sed eadem OQ, NM simul aequales sunt duabus QM, ON. Itaque et tripla NM aequalis duabus QM, ON.

Est autem NM aequalis ei quae subtensa est tertiae parti arcus RF, at verò QM, cum sit dupla EM, aequatur ei quae totum RF arcum subtendit. Itaque tres simul quae tertias partes subtendunt arcus RF aequantur subtensae totius arcus et ipsi NO. Sicut igitur quadratum radij MK ad qu. ejus quae tertiam partem subtendit arcus RF, hoc est, ad qu. MN ita est ipsa NM ad NO longitudine. hoc enim postea ostendetur. ⁵⁾ Quare et per conversionem rationis ut qu. KM ad qu. KN ita NM ad MO. Ut autem qu. KM hoc est qu. BM ad qu. KN ita est circulus circa diametrum BD ad circulum cujus KL diameter. Ergo quoque ille circulus ad hunc erit ut NM ad MO, ac proinde aequalis conus BOD cono KML, quia eorum bases et altitudines reciprocantur ⁶⁾. Conus autem BOD est ad semisphaeram BCD, hoc est, ad conum basin habentem circulum circa diametrum BD et altitudine duplam MC, ⁷⁾ ut MO ad duplam MC, quoniam eadem basi insunt. Itaque et conus KML erit ad semisphaeram BCD ut MO ad duplam MC. Porro autem est semisphaera eadem ad sectorem solidum MKCL ut superficies sphaerica illius ad hujus superficiem ⁸⁾ id est ut MC ad NC ⁹⁾, quare et per conversionem

28 août 1653 et du 28 février 1654; voir les pp. 241 et 270 du T. I. Pour se convaincre de l'identité essentielle des deux constructions il suffit de calculer la corde de l'arc qui est divisé en trois parties égales. On trouvera dans les deux cas: $\frac{S-T}{S+T} \cdot AC$.

⁵⁾ Voir, plus loin dans cette même pièce, le théorème que nous avons cursivé. En effet, il est clair que $NO = 3 MN - RF$ est égal à la ligne du théorème „ad quam subtensa tertiae partis eam habet rationem quam quadratum semidiametri ad quadratum ipsius tertiae arcus parti subtensae.”

⁶⁾ Huygens ajoute en marge „15. 12. Elem.” Consultez la note 10 de la pièce N°. 1, p. 11 du Tome présent.

⁷⁾ Huygens ajoute „32. 1. 1. Archim. de Sphaer. et Cylin.” „Quaelibet sphaera quadrupla est eius coni, qui quidem conus habuerit basin aequalem circulo in sphaera maximo altitudinem vero aequalem semidiametro sphaerae.” (p. 32 de l'édition de Bale; Heiberg, T. I, p. 141, où elle porte le numéro 34).

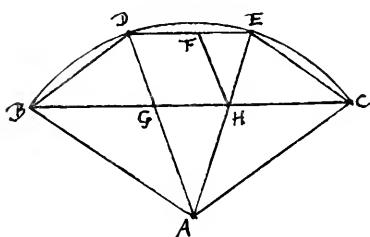
⁸⁾ Huygens ajoute „42. 1. Arch. de Sphaer. et Cylin.” Voir la note 11, p. 11 du Tome présent.

⁹⁾ Huygens ajoute „3. 2. Arch. de Sph. et Cylin.” „Datum sphaeram sic secare plana superficie, ut portionum superficies inter se similem cuicumque proportioni datae retineant proportionem” (p. 45 de l'édition de Bale, Heiberg, T. I, p. 207). On n'y trouve pas expressément la proposition en question; mais elle se déduit facilement de celle citée dans la note 12 de la pièce N°. 1, p. 11 du Tome présent, et le même raisonnement, dont on a besoin alors, est suivi dans le texte de la Prop. 3, Libr. 2 mentionnée.

rationis et invertendo, erit pars semisphaerae, quae remanet dempto sectore KMLC, ad ipsam semisphaeram, ut NM ad MC, sive ut dupla NM quae est OQ ad duplam MC. Verum ostensum fuit esse conum KML ad eandem semisphaeram, ut OM ad duplam MC. Itaque tota pars solida KLDB erit ad semisphaeram BCD ut tota QM ad duplam MC ¹⁰⁾ sive ut EM ad MC. Quare invertendo rursus et per conversionem rationis erit semisphaera dicta ad portionem KLC ut MC ad CE: Et proinde sphaera tota ad KLC portionem ut AC ad CE. Et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut AE ad EC, hoc est ut S ad T. Quod erat ostendendum.

Circumferentiae arcu qui dimidia circumferentia minor sit in tria aequalia secto; tres simul rectae quae aequalibus partibus subiunguntur, aequales sunt ei quae toti arcui subtenditur una cum ea linea ad quam subtensa tertiae partis eam habet rationem quam quadratum semidiametri ad quadratum ipsius tertiae arcus parti subtensae.

[Fig. 2.]



Arcus Sectoris ABC in tria aequalia divisus sit punctis D et E, subtendanturque partibus rectae BD, DE, EC, et toti arcui linea BC.

Dico tres simul BD, DE, EC aequari subtensae BC una cum ea ad quam DE eam habeat rationem quam quadratum AE ad ED quadratum.

Ductis enim AD, AE, quae ipsam BC secant in G et H, ducatur HF parallela AD. Constat ergo similes esse triangulos ACE, CEH; quare ut AE ad EC ita erit EC ad EH. Itaque proportio AE ad EH duplicata est ejus quae AE ad EC, ac proinde eadem quae quadrati AE ad qu. EC vel qu. ED. Sicut autem AE ad EH ita est DE ad EF, ergo quoque ut qu. AE ad qu. ED ita DE ad EF. DF autem aequalis GH. Itaque cum BD sit aequalis ipsi BG, et CE ipsi CH, et DE duabus GH et FE; apparet tres simul BD, DE, EC aequari toti BC simul et FE, ad quam DE ostensa est eam habere rationem quam AE qu. ad qu. ED.

¹⁰⁾ Huygens ajoute „24. 5. Elem.” Voir sur cette proposition la note 28 de la page 312 du T. XI et la note 13, p. 11 du Tome présent. C'est encore ici la seconde partie de la proposition qu'on doit appliquer.

V. 9

1652.

8 Febr. 1652.

Sit b ad a ut cc ad ad , oportet ostendere esse b ad c ut c ad d .
 $acc \propto abd^2$) cb ad ca ut cc ad ad Dicendum. Ratio b ad a componitur
 b ad c ut c ad d ex ratione b ad c et c ad a . Ratio
autem quadr. cc ad rectang. ad compo-
nitur ex ration. c ad d et c ad a .
Ergo ablata utrinque ratione c ad a ,
erit ratio b ad c eadem quae c ad d .

Sit a ad b ut cd ad bn , oportet ostend. a ad c ut d ad n .
 $abn \propto bcd^2$) ac ad bc ut cd ad bn Ratio a ad b compon. ex rat. a ad c
 a ad c ut d ad n et c ad b . Ratio vero \square^i cd ad
 \square bn comp. ex ration. d ad n et c
ad b . Ablata igitur communi rati.^c
 c ad b , erit eadem ratio a ad c quae
 d ad n .

¹) Le but de Huygens, en composant cette pièce curieuse, empruntée aux pages 279—281 du manuscrit N^o. 12, doit avoir été de se faciliter la rédaction des démonstrations géométriques à la mode des anciens, dont il accompagna ses théorèmes et constructions, trouvées sans doute, pour la plupart, par l'analyse. La pièce rappelle l'ouvrage posthume de Van Schooten „Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico” de 1661 (voir la note 1, p. 41 du T. III) dans lequel, pour montrer que la méthode synthétique de démontrer est contenue implicitement dans l'Analyse, il apprend à déduire systématiquement de cette dernière les compositions et démonstrations purement géométriques et synthétiques. Ajoutons qu' on trouve une application des algorithmes de la pièce présente dans la pièce N^o. XVI, p. 72 du Tome présent.

²) Les facteurs a des deux termes de cette égalité ont été biffés. Huygens ajouta encore ici en marge: „vel bd ad ad ut cc ad ad ; ergo $bd \propto cc$; ergo b ad c ut c ad d .”

³) Les facteurs b ont été biffés.

vel sic. Ratio a ad b comp. ex rat. a ad d et d ad b . Ratio autem $\square cd$ ad $\square bn$ comp. ex rat.^s c ad n et d ad b . Ergo ablata communi rat.^e d ad b , Erit eadem ratio a ad d quae c ad n et permutando.

Sit $\frac{ab}{c} \propto d + \frac{ef}{g}$ oportet ostendere c ad g ut ab ad $dg + ef$.

Dem. c est ad a ut b ad $d + \frac{ef}{g}$ quae vocetur h , ergo $\square ab \propto \square ch$. Est autem $\square ch$ ad $\square^a dg + ef$ hoc est ad $\square hg$ ut c ad g . Ergo et $\square ab$ ad $\square hg$ hoc est ad $\square^a dg + ef$ ut c ad g .

Esto ar ad bc ut c ad q . Oportet ostendere, ar ad cc ut b ad q .

$\frac{bcc}{ar} \propto q$. Dicendum. ar ad bc ut c ad q . Verum bc ad cc ut b ad c . Ergo ex aequali in proportionem perturbata erit ar ad cc ut b ad q . per 23. lib. 5. Elem. ⁴⁾

Esto no ad pq ut r ad s . Ostendendum sit, n ad p ut rq ad so . Hoc est, sit ratio composita ex ratione n ad p et ex o ad q eadem quae r ad s , et oporteat ostendere rationem n ad p eandem esse cum ea quae componitur ex ratione r ad s et ex q ad o . Dicendum; quia ratio composita ex n ad p et o ad q eadem est quae r ad s , addita utrumque ratione q ad o , erit composita ex rationibus n ad p , o ad q , et q ad o , hoc est ratio n ad p eadem quae composita ex rat. r ad s et q ad o .

Hyp. n est ad r ut c ad p . Itemque q ad r ut c ad s . Ostendendum quod n ad q ut s ad p .

Quia n ad r ut c ad p , erit $\square np$ aequal. $\square^o rc$. Sed eidem $\square^o rc$ aequale est $\square qs$, quia q ad r ut c ad s . Ergo $\square np$ aequale $\square qs$, Ideoque n ad q ut s ad p .

⁴⁾ Voir la note 22, p. 304 du Tome XI.

Aliter. Ratio n ad q componitur ex ratione n ad r et r ad q , quarum r ad q eadem cum ratione s ad c , altera vero n ad r eadem quae c ad p . Ergo n ad q rationem habet compositam ex ratione s ad c et c ad p , hoc est rationem s ad p .

Aliter optimè. Quia n ad r ut c ad p erit invertendo r ad n ut p ad c , verum q est ad r ut c ad s . Ergo ex aequo in proportione perturbata *) erit q ad n ut p ad s .

Hijp. e ad b ut c ad n . Item a ad b ut c ad l . Et e ad l ut a ad p . Ostendendum quod $n \propto p$.

Quia e ad b ut c ad n , erit invertendo b ad e ut n ad c . Sed a est ad b ut c ad l , ergo ex aequo in proportione perturbata *) erit a ad e ut n ad l . Sed et a ad e ut p ad l quia erat e ad l ut a ad p . Igitur n ad l ut p ad l quare $n \propto p$.

2 Nov. v.

1652.

Hypoth. $a - \frac{ax}{e}$ ad $\frac{cx}{e}$ ut a ad b Ostendendum $c + b$ ad b ut e ad x .

perm. et per conv. rat. contr. $\frac{ax}{e}$ ad a ut $b - \frac{cx}{e}$ ad b	$\left\{ \begin{array}{l} \textit{aliter brevius.} \text{ Sicut } a - \frac{ax}{e} \\ \text{ad } a \text{ ita potest ostendi esse} \\ e - x \text{ ad } e. \text{ atque erit con-} \\ \text{tinuo} \\ e - x \text{ ad } e \text{ ut } \frac{cx}{e} \text{ ad } b \\ \\ \text{Quod autem ut } a - \frac{ax}{e} \\ \text{ad } a \text{ ita sit } e - x \text{ ad } e \text{ sic} \\ \text{ostenditur.} \\ e \text{ est ad } x \text{ ut } a \text{ ad } \frac{ax}{e} \\ \text{ergo dividendo, } e \text{ ad } e - x \\ \text{ut } a \text{ ad } a - \frac{ax}{e}, \text{ et inver-} \\ \text{tendo.} \end{array} \right.$
sed e ad a ut x ad $\frac{ax}{e}$	
ideoque $\frac{ax}{e}$ ad a ut x ad e	
ergo x ad e ut $b - \frac{cx}{e}$ ad b	
per conv. rat. cont. $e - x$ ad e ut $\frac{cx}{e}$ ad b	
sed e ad c ut x ad $\frac{cx}{e}$	
ergo ex aeq. in prop. perturb. $e - x$ ad c ut x ad b	
et perm. et comp. e ad x ut $c + b$ ad b	

8 Nov. 1652.

$$bd - bx - x^2 + dx \propto ax$$

$$x \text{ ad } d - x \text{ ut } b + x \text{ ad } a$$

$$x \text{ ad } d \text{ ut } b + x \text{ ad } a + b + x$$

$$b + x \text{ ad } x \text{ ut } a + b + x \text{ ad } d$$

$$b + x \text{ ad } b \text{ ut } a + b + x \text{ ad } a + b - d + x$$

$$b \text{ ad } a + b - d + x \text{ ut } x \text{ ad } d$$

Quoniam ductis in sese medijs
et extremis non ultra quadratum
seu planum ascenditur, potest re-
solutio ad finem perduc⁵⁾ per
solas proportiones, ut hic factum
apparet.

$$a - x \text{ ad } d \text{ ut } x^2 - bb \text{ ad } cx - qq$$

$$x^2 - bb \propto a - x \text{ in } \frac{cx}{d} - \frac{qq}{d} \text{ lineae designandam}$$

$$x^2 + \frac{c^2 x^2}{d} - \frac{acx}{d} - \frac{qqx}{d} \propto bb - \frac{aqq}{d} \text{ sit } \frac{ac + qq}{d} \propto p$$

⁵⁾ Huygens n'achève pas complètement la construction, puisqu'ici, et aussi dans le paragraphe qui suit, il s'arrête après avoir réduit le problème à celui de construire la ligne x , déterminée par une proportion $b : (x \pm p) = x : d$. Si c'était son but, comme nous le supposons, de montrer que les problèmes plans peuvent être résolus sans sortir des proportionnalités, c'est-à-dire sans résoudre explicitement une équation quadratique, il aurait pu introduire la longueur q , définie par la proportion $b : q = q : d$, réduire la proportion donnée à la forme : $x : q = q : x \pm p$ et citer enfin la „Prop. XII. Data media trium proportionalium & differentia extremarum, invenire extremas”, qu'on trouve dans l'ouvrage de Viète : „Effectio num geometricarum Canonica recensio.” (Voir la p. 233 de l'ouvrage cité dans la note 31, p. 10 du T. I). Il nous semble, en effet, que pour expliquer la portée de la dernière partie de la pièce présente, on doit sous-entendre quelque chose de cette nature.

Comparez encore à cet effet la pièce N°. XVI, déjà citée dans la note 1 où, par une série de proportions, analogues à celles du texte, la construction d'un problème plan est réduite à celle de la ligne x , donnée par la proportion $x : s = n : x + m$. Alors Huygens fait suivre une construction bien connue par laquelle il résout l'équation $xx + xm = ns$; mais dans la démonstration qu'il ajoute, cette construction amène immédiatement la proportion $x : s = n : x + m$, d'où il s'ensuit qu'on peut fonder ces sortes de démonstrations sur les seules proportions.

$$xx + \frac{cxy}{d} - px \propto m$$

$$x \text{ ad } n \text{ ut } n \text{ ad } x + \frac{cx}{d} = p$$

$$x \text{ ad } n \text{ ut } nd \text{ ad } dx + cx = dp$$

Sit $d + c$ ad d ut p ad q . Ergo $dp \propto dq + cq$

$$x \text{ ad } n \text{ ut } nd \text{ ad } dx + cx = dq + cq$$

Sit $d + c$ ad d ut n ad f ergo $dn \propto fd + fc$

$$\text{Et } x \text{ ad } n \text{ ut } fd + fc \text{ ad } dx + cx = dq + cq$$

$$x \text{ ad } n \text{ ut } f \text{ ad } x = q.$$



$\propto \frac{ax}{x-c}$ unde additis qu.^{is} BC, CE, ablatoque hinc qu.^o BE, relinquoque diviso per duplam CE orietur segmentum basis CR

$$\frac{aaxx}{xx - 2cx + cc} + bb - xv \quad \propto d \quad CR$$

$$\frac{2ax}{x - c}$$

et tandem $x^4 - 2cx^3 - aa \left\{ \begin{array}{l} -bb \\ +cc \end{array} \right\} xx + 2bbe \left\{ \begin{array}{l} -2acd \end{array} \right\} x - bbcc \propto 0$ et sublato secundo ter-

mino, ponendo nimirum $y + \frac{1}{2}c \propto x$ erit post institutam operationem

$$y^4 \propto \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}cc \\ +aa \\ +bb \\ -2ad \end{array} \right\} yy \quad \left\{ \begin{array}{l} -bbc \\ +aac \end{array} \right\} y \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4}cc \\ +\frac{1}{2}ad \\ +\frac{1}{4}aa \\ +\frac{1}{4}bb \end{array} \right\} cc$$

apparet hinc quod si $bb \propto aa$ evanescat affectio sub y , quodque propterea fit futura aequatio quadrata, cum autem $a \propto b$ cum AB rhombus est, et mutatis ubique b in a erit hujusmodi aequatio

$$y^4 \propto \left\{ \begin{array}{l} +\frac{1}{2}cc \\ +2aa \\ -2ad \end{array} \right\} yy \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4}cc \\ +\frac{1}{2}ad \end{array} \right\} cc \quad \text{unde invenitur}$$

$$yy \propto aa - ad + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{4} \sqrt{aacc + a^4 - 2a^3d + aadd} \quad 3)$$

sive

$$yy \propto aa - ad + \frac{1}{4}cc + a \left| \begin{array}{l} cc + aa - 2ad + dd \end{array} \right|$$

Dividatur DE bifarium in H ergo BH est y .⁴⁾ Et ducatur EL quae faciat angulum BEL aequalem angulo BPA. erunt jam anguli ELP et EDP duobus rectis aequales,⁵⁾ et puncta ideo D, P, L, E, in circulo⁶⁾ et rectang. LBP aequ.

³⁾ Comme on le voit, la seconde racine n'est pas discutée. Toutefois elle peut prendre une valeur positive. Elle mène alors aux solutions où le segment DE = c se trouve à l'intérieur de l'angle CAP.

⁴⁾ Puisqu'on a posé $y + \frac{1}{2}c = x$ et que BE = x , HE = $\frac{1}{2}c$.

⁵⁾ Puisqu'il en est de même par construction des angles LPA et BEL.

⁶⁾ Ce cercle une fois tracé, Huygens, pour obtenir sa nouvelle construction, n'a plus qu'à inter-

Quod verò circumferentia fecabit rectam HF sic fiet manifestum.

Sit BQ \propto BA et jungatur GQ, itemque GA. Itaque trianguli GAQ duo anguli A et Q inter se aequales sunt et singuli angulo A vel G trianguli HAG, quare similia erunt \triangle^a HAG, GAQ et angulus AGQ aequ. angulo AHG. Si itaque super AQ describeretur circumferentia similis circumf.^{ae} AMFD ¹¹⁾ ea per G transiret et tangeret rectam HF; sed quoniam qu. ex BD aequale est quadratis ex AB seu BQ et ex o, erit BD major BQ, et AD major AQ, ergo necessario circumferentia AMFD fecabit rectam HF.

Porro quia ang. FDA aequ. angulo AKC (nam uterque addito FKC aequatur 2 rectis ¹²⁾) distantque tantum inter se lineae HF, AE quantum HA, GC, erit ideo FD \propto AK. Sed et MA \propto FD ergo MA quoque \propto AK, et \triangle AMH idem cum \triangle^o AKC ¹³⁾ utraque vero similia \triangle^{lo} ADF. Ergo ut HM ad MA, hoc est ut NP ad FD ita FD ad DA. Quare contentum sub NP, AD aequ. qu. DF; et addito utrinque \square^o PAD seu ADE, erit \square NAD aequ. qu. FD et \square^o ADE.

Et sumptis omnium duplis erit duplum \square NAD aequ. duplo qu. FD et duplo \square ADE. Et addito communi qu. AD erit geminum \square NAD + qu. AD hoc est geminum \square sub BC, AD + qu. AD (nam BC \propto AD ¹⁴⁾) aequale duplo qu. FD + qu. AD + 2 \square ADE. Sed haec simul aequantur qu. AF + qu. FD, (nam duplum \square ADE + qu. AD + qu. DF aequantur qu. AF ¹⁵⁾) Ergo duplum \square sub BC, AD + qu. AD aequale qu. AF + qu. FD, hoc est, qu. AF + qu. AK, nam diximus FD AK esse aequales inter se. \square verò sub CB, AD una cum \square BAD aequatur \square^o CAD, et dupla duplo; ergo si à qu. AD + duplo \square sub BC, AD, auferatur duplum \square CAD, relinquetur qu. AD cum defectu dupli \square BAD. Duplo autem \square^o CAD aequale est duplum \square KAF, quia puncta KCDF sunt in circuli ejusdem circumferentia. et erat qu. AF + qu. AK aequale qu. AD +

trouve dans le manuscrit N^o. 12, aux pages 235 et 246, une rédaction nouvelle, datée du 19 octobre 1653, qui a passé, avec des modifications très peu importantes, dans les „III. quor. probl. constr.” au „Probl. VI” et pour laquelle nous renvoyons à cet ouvrage de 1654, que nous reproduisons plus loin dans ce Tome.

¹¹⁾ C'est-à-dire, contenant le même angle.

¹²⁾ Puisque les points K, F, D, C, correspondants aux points D, E, L, P de la Fig. 1, se trouvent sur une même circonférence de cercle; ce qui se démontre facilement en remarquant que par construction $\angle AFD = \angle GHA = \angle ACG = 180^\circ - \angle GCD$.

¹³⁾ Puisqu'on a non seulement MA = AK et $\angle AKC = \angle ADF = \angle MAD = \angle HMA$; mais encore $\angle AHM = \angle ACK$.

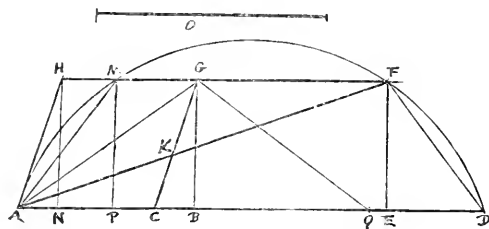
¹⁴⁾ Lisez AN.

¹⁵⁾ Huygens ajoute en marge: 12.2 Elem. „In amblygoniis triangulis, quadratum, quod sit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quae sunt à lateribus obtusum angulum comprehendibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quae sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exteriori linea sub perpendiculari prope angulum obtusum”. (Clavius, p. 192).

+ 2 \square sub BC, AD. Ergo ablato duplo \square KAF à qu. AF + q. AK hoc est ablato \square AKF ¹⁶⁾ + q. AK à qu. AF, restabit qu. KF aequale qu. AD minus 2 \square BAD, seu minus 2 \square ABD et 2 q. AB; quare addito utrumque quadrato AB, erit qu. KF + qu. AB aequale qu. AD minus 2 \square ABD minus qu. AB: hoc est qu. BD. Sed eidem qu. BD effect aequale ex constr. qu. ex o + q. AB. Ergo haec duo quoque aequalia qu.^{is} duobus KF et AB; et ablato communi AB q. erit qu. ex o aequ. q. KF, quod erat demonstrandum. Potest autem angulus FDA vel rectus vel acutus fieri in quibus casibus vel facilius vel non multum à praecedenti differens dem.^o obtinebit.

Alter casus cum angulus rhombi C obtusus est, eandem habet compositionem.

[Fig. 3.]



Et demonstrationem quoque parum diversam, quae erit hujusmodi, mutatis tantum signis affectionis ubi opus erit.

Primum quidem sicut modo ostenditur id quod sub NP, AD [Fig. 3] continetur aequari quadrato DF. ¹⁷⁾ unde detrahendo utrumque à rectang. PAD vel ADE,

erit \square NAD \propto \square ADE — q. FD; et sumptis omnium duplis, duplum \square NAD \propto 2 \square ADE — duplo q.^o FD, et utrumque abstrahendo à qu.^o AD, erit qu. AD — duplo \square NAD \propto qu. AD + duplo q.^o FD — 2 \square ADE; sed haec simul aequantur qu.^{is} ex AF et FD, (nam qu.^a simul AD, DF — 2 \square ADE aequalia sunt qu.^{is} AF per. 13. 2ⁱ Elem. ¹⁸⁾) Ergo qu. AD minus duplo \square NAD aequale est qu.^{is} AF et FD, hoc est, qu.^{is} AF et AK, nam FD \propto AK ostensa est. ¹⁹⁾ detrahendo igitur aequalia ab aequalibus, hoc est illinc auferendo 2 \square CAD, hinc vero duplum \square KAD ²⁰⁾ (haec enim aequalia inter se, quoniam puncta D, C, K, F in ejusdem circuli circumferentia) erunt etiam residua aequalia. Sed à qu.^o AD — 2 \square NAD seu — 2 \square CB, AD, si aufer-

¹⁶⁾ Lisez: 2 \square AKF.

¹⁷⁾ Voir le troisième alinéa de la page précédente vers la fin.

¹⁸⁾ „In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quae sunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno latere, quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.” (Clavius. p. 198).

¹⁹⁾ Voir l'alinéa cité dans la note 17.

²⁰⁾ Lisez KAF.

ratur infuper $2 \square CAD$, relinquetur qu. $AD - 2 \square BAD$. At à qu.^{is} FA , et AK auferendo $2 \square KAF$, relinquetur qu. KF . Itaque qu. KF aequale qu.^o $AD - 2 \square BAD$, hoc est qu.^o $AD - 2 \square ABD - 2 q. AB$, quare addendo utrinque qu. AB erit qu. $KF + qu. AB \propto qu. AD - 2 \square ABD - qu. AB$; Sed hoc residuum est aeq. qu.^o BD , ergo qu. $KF + qu. AB \propto qu. BD$, hoc est qu.^o ex θ et qu. AB . Itaque auferendo commune qu. AB , erit qu. KF , aequ. qu.^o ex θ , quod erat ostend.

Haec autem proponentur melius eo modo quo problematis partem alteram trademus, ²¹⁾ Primum videlicet tale theorema demonstrando.

Si sit rhombus $HACG$ et ex angulo A ducatur AKF ad productum latus HF , et FD faciens angulum AFD aequalem angulo H , et GB perpendicularis ipsi AD , dico quadrata ex KF et ex AB quadrato BD aequalia esse.

Hoc primum demonstrare oportuit, dein Resolutionem Compositionemque et demonstrationem problematis subijcere quae breves erunt, et schema habebunt minus implicitum, quod et Pappus in prop.^e 72. lib. 7, rectè observavit. ²²⁾

²¹⁾ Voir la pièce N^o. VII, qui suit.

²²⁾ En effet, au lieu cité, p. 206 verso de l'édition de Commandin citée p. 259 du T. II, note 3 (Hultsch, T. II, p. 783), Pappus dans la démonstration de la construction correspondante, où le losange est remplacé par un carré (voir cette construction à la page 227 du Tome XI), fait appel à un lemme qui, avec les notations de la figure 3 de la page 228 du T. XI, et après y avoir tiré la droite HS , se lit comme il suit dans la traduction latine de Commandin : „Sit quadratum BD , & ducatur BGH , atque ipsi ad rectos angulos HS . Dico quadrata ex CD GH quadrato ex CS aequalia esse.” Et ce théorème est démontré par Pappus dans la „Prop. 71. lib. 7.” p. 206 recto de l'édition de Commandin (Hultsch, T. II, p. 780-783).

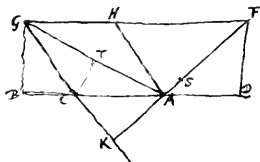
VII.¹⁾

1652.

11 Febr. 1652.

*dato rhombo GHAC productiſſique lateribus GH, GC, oportet ducere KAF
aequalem datae.²⁾*

[Fig. 1.]



Factum fit et dividatur KF bitariam in S. et du-
catur GA diameter. Sitque GH, GC \propto a. GA \propto b.
KF \propto c. AS \propto x.³⁾

$$KA \left(\frac{1}{2}c - x \right) \quad AC (a)$$

$$KF(c) \text{ — } FG \left(\frac{ac}{\frac{1}{2}c - x} \right)$$

$$AF \left(\frac{1}{2}c + x \right) \text{ — } AH (a)$$

$$KF(c) \text{ — } KG \left(\frac{ac}{\frac{1}{2}c + x} \right)$$

$$a[ddc] \left| \begin{array}{l} \square KAF \frac{1}{4}cc - xx \\ \square GA \quad bb \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{4}cc - xx + bb \propto ^4) \square KGF \frac{aacc}{\frac{1}{4}cc - xx} ^5)$$

¹⁾ La pièce occupe les pages 192—196 du manuscrit N°. 12.

²⁾ Comparez le problème analogue de la pièce N°. VI.

³⁾ Huygens profite de l'expérience qu'il a obtenue dans la pièce précédente pour choisir l'inconnue dès l'abord de telle manière qu'elle amènera une équation où le terme avec le cube de l'inconnue a disparu. En effet, l'AS \propto x est analogue à la BH \propto y de la pièce précédente.

⁴⁾ Puisque GA est la bisectrice de l'angle CGH et qu'on a alors, d'après un théorème bien connu, $KG \propto GF = KA \propto AF + GA^2$.

$$\frac{1}{16}c^4 - \frac{1}{2}ccxx + x^4 - bbx + \frac{1}{4}cebb \propto aacc$$

$$x^4 \propto \frac{1}{2}cc \left\{ \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right. \begin{array}{l} aa \\ bb \end{array} \left\{ \begin{array}{l} xx \\ - \end{array} \right. \frac{1}{4}bb \left\{ \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right. \frac{1}{16}cc \left\{ \begin{array}{l} cc \\ - \end{array} \right. \quad \text{quadrata aequatio.}$$

$q.$ AS $xx \propto \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}bb - a\sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}}$ substrahe ex quadrato SF $\propto \frac{1}{4}cc$
 restat $-\frac{1}{2}bb + a\sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}} \propto \square$ KAF.

Sit ducta FD, faciens angulum AFDaequalem angulo ACK ⁶⁾ et consequenter
 \triangle los finiles CAK, FAD. ergo \square CAD \propto \square KAF. applicando itaque
 \square KAF ad CA $\propto a$ fit AD $\propto -\frac{1}{2}\frac{bb}{a} + \sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}}$. Sit GB perp. in AC et

5) Huygens ajoute ici sur une bande de papier attachée à la page :

$$| \cdots \cdots \cdots \frac{p}{\quad} \cdots \cdots \cdots |$$

$$,,\frac{1}{4}cc - xx \quad \cdots \quad aa \quad \cdots \quad cc \quad \cdots \quad -\frac{1}{4}cc - xx + bb$$

applicentur omnia ad a hoc est fit $\frac{1}{4}cc - \frac{xx}{a} \propto q(AD)$. $\frac{cc}{a} \propto p$. $\frac{bb}{a} \propto d(2AB)$

$$\text{ergo} \quad q \quad a \quad \cdots \quad p \quad q + d$$

$$qq + qd \propto ap \text{ five } cc \text{ adde } \frac{1}{4}dd$$

$$qq + qd + \frac{1}{4}dd \propto cc + \frac{1}{4}dd$$

$$q + \frac{1}{2}d \propto \sqrt{cc + \frac{1}{4}dd}$$

et de même, sur le revers de la bande :

„melius.

$$\frac{1}{4}cc - xx \quad aa \quad \cdots \quad cc \quad \cdots \quad -\frac{1}{4}cc - xx + bb$$

Sit $\frac{1}{4}cc - \frac{xx}{a} \propto q(AD)$. $\frac{bb}{a} \propto d(2AB)$ five $ad \propto bb$

$$\text{ergo} \quad q \quad a \quad \cdots \quad cc \quad qa + da$$

$$\text{Sed} \quad q \quad a \quad \cdots \quad qq + qd \quad qa + da$$

$$\text{Ergo} \quad cc \propto qq + qd$$

Il nous semble que ces variantes ont le but d'éviter l'introduction de l'équation biquadratique. Et la seconde est préférée à la première parce qu'elle ne nécessite pas d'introduire la longueur p , qui ne correspond avec aucune des lignes de la figure.

⁶⁾ Par analogie avec la droite EL de la Fig. 1, p. 26. Voir sur cette droite EL, la note 6, p. 27.

CT in GA. Ergo similia triangula CAT, GAB sed CA est a , AT $\frac{1}{2}b$, AG b , ergo $AB \propto \frac{bb}{a}$, ergo cum AD sit $\sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa} - \frac{1}{2}\frac{bb}{a}}$, additâ AB $\propto \frac{bb}{a}$, erit DB $\propto \sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}}$, hoc est DB qu. \propto □ KF datae una cum qu.° AB.

Unde talis invenitur problematis constructio. *Oportet demissâ perpendiculari GB facere BD quae possit quadr. lineae datae una cum qu. ex AB, tum super AD, describere circumferentiae partem quae capiat angulum aequalem angulo CGH. Ea enim secabit rectam GH productam in F, unde ducta FAK aequabitur datae lineae. Sed et in alio puncto secabit eandem GF inter H et F, cujus ope intersectionis problema itidem absolvetur.*⁷⁾

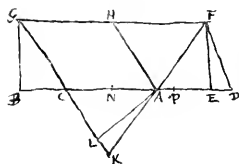
THEOREMA. ⁸⁾ [I.]

Sit rhombus GCHA et ducatur KHF⁹⁾ occurrens productis rhombi lateribus utrinque, et ducatur FD quae faciat angulum AFD aequalem CGH, et sit GB perpendicularis super AC.

dicō quadrata ex KF et AB aequari qu.° ex BD.

Sit enim AL super GK ad angulos rectos ducta et FE super BD, et ponatur AP quidem aequalis ED; AN vero ipsi CB.

[Fig. 2.]



Quia igitur similes sunt trianguli GBC, ACL, et latus GC aequale AC lateri, erit quoque CL aequale CB hoc est AN. Rursus quoniam similia sunt Δ^a CAK, FAD, habent enim angulum ad A aequalem et est angulo ACK ex constr. aequalis angulus AFD, erit et angulus AKC aequ. ang.° ADF. anguli autem ALK, FED sunt recti, itaque similia quoque triangula sunt ALK, FED. sed FE est aequ. AL ergo et AK aequ.

FD et LK aequalis ED hoc est AP, itaque tota NP etiam aequalis CK. Propter similia verò triangula, est AD ad DF ut AK ad KC. sed AK aequalis est FD et KC aequalis NP. Itaque AD ad DF ut DF ad NP, ideoque contentum sub AD, NP aequale qu.° FD et auferendo utrinque □ DA, AP vel AD, DE erit □ NAD aequale qu.° FD — □ ADE. Et sumptis omnium duplis, duplum □ NAD \propto duplum qu.° DF — 2 □ ADE et addito communi qu.° AD, erit duplum

⁷⁾ On retrouve cette construction avec une légère modification dans la lettre à van Schooten du 23 oct. 1653 (p. 248—249 du T. I) et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” de 1654 (Problème VII, première solution); voir la note 14.

⁸⁾ Comparez les trois derniers alinéas de la pièce précédente, p. 31 du Tome présent.

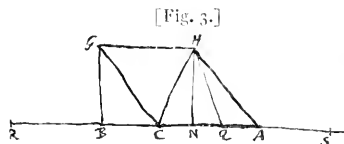
⁹⁾ Lisez KAF.

\square NAD hoc est duplum \square BC, AD + qu. AD \propto 2 qu. FD + qu. AD — 2 \square ADE; sed haec aequalia sunt qu.^{is} ex AF et FD (nam qu.^a ex FD et DA — 2 \square ADE aequantur qu.^o AF¹⁰)). Itaque 2 \square BC, AD + qu. AD \propto qu.^{is} ex AF et FD, hoc est qu.^{is} ex AF et AK, nam AK ipsi FD aequalis ostensa est. Additis itaque aequalibus ad aequalia, hoc est addendo illic 2 \square CAD hinc vero 2 \square KAF (sunt autem haec aequalia, quoniam propter Δ^a sim. est CA ad AK ut FA ad AD) erunt etiam summae aequales. Sed addendo ad 2 \square BC, AD + qu. AD, duplam \square CAD fit 2 \square BAD + qu. AD. at qu.^{is} ex FA et AK addendo duplum \square KAF fit qu. KF; ergo qu. KF aequale 2 \square BAD + qu. AD. additoque utrinque qu. BA, erit qu. KF + qu. BA aequale qu.^o BD, quod erat ostendendum.

Potest autem rursus angulus FDA rectus vel obtusus esse, prout fuerit angulus FKC. ijfque casibus non multum diversa demonstratione idem ostendetur facilius quidem multò si angulus FDA rectus fuerit.

THEOREMA. 2. ¹¹)

Sit rursus rhombus GC.HI, cujus ducatur diameter HC, et in productum latus AC cadat perpendicularis GB, porro sit HQ posita aequalis HC, et ponatur BS quae possit quadratum ex BA una cum quadruplo qu.ⁱ ex CH. Dico AS ipsi CQ aequalem esse.



Sit enim HN ipsi CQ ad ang. rectos. quia igitur CHQ est triangulum isosceles erit CQ bifariam divisa in N. Ponatur BR ipsi BN aequalis, eritque jam utraque harum aequalis ipsi GH hoc est CA. Quia verò sunt similia triangu-
la CGH, CHQ, nam angulis GCH, GHC aequales sunt singuli HCQ, HQC; erit QC ad CH ut CH ad CG, et qu. CH aequale \square sub GC, CQ hoc est \square sub BN, CQ, hoc est duplo \square BNQ, hoc est \square RNQ, seu RNC.

Est autem qu. BA hoc est qu. RC una cum duplo \square RCQ + qu. CQ aequale quadrato RQ. Sed duplum \square RCQ + qu. CQ aequatur quadruplo \square RNC, nam \square RCQ aequatur duplo \square RCN, et qu.^m CQ quatuor qu.^{is} CN. Itaque addito ad qu. BA quadruplo \square RNC hoc est 4 qu.^{is} CH erunt ea simul aequalia qu.^o RQ; sed ijfdem aequale positum est qu. BS, ergo BS q. ipsi RQ

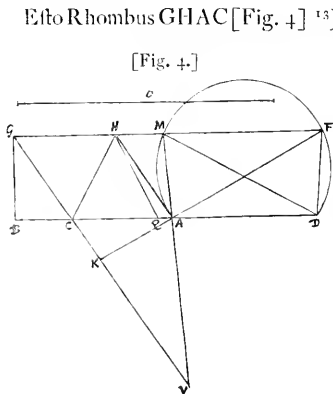
¹⁰) Huygens ajoute en marge „1.2.2. Elem.” Voir la note 15, p. 29.

¹¹) Le théorème sert à préparer la démonstration de ce qu'on appelait la „Determinatio” (voir p. e. l'avant-dernier alinéa de la page 231 du Tome XI), laquelle, dans le problème présent, exige que la ligne donnée *a* (voir la figure 4) soit plus grande que le double de HC; puisque sans cela la construction devient impossible.

qu.^o aequale: et BS ipsi RQ. Quare ablata communi BQ erit QS aequalis RB hoc est ipsi CA; et rursus communi ablata QA, erit AS aequalis CQ; quod erat demonstrandum.

PROBLEMA. ¹²⁾

Rhombo dato et duobus lateribus contiguis productis, aptare sub eorum angulo interiori magnitudine datam rectam lineam quae ad oppositum angulum pertineat. debet autem data linea non minor esse duplâ diametro, quae alios duos rhombi angulos jungit.



Est Rhombus GHAC [Fig. 4] ¹³⁾, et producta ejus latera GH, GC; data autem sit linea o , quae major sit dupla diametro HC, nam si aequalis est duplae HC constructio problematis manifesta est. Sit itaque major et oporteat ducere KAF ipsi o aequalem.

Sit GB ipsi AC ad angulos rectos et qu.^{is} ex BA, et ex o sit aequale ex BD quadratum. ¹⁴⁾ Dein super AD describatur circumferentiae pars capax anguli CGH, quae ubi rectam GH productam secabit, inde ducantur FAK, MAV dico harum utramque aequale esse ipsi o .

Quod autem dicta circumferentia secabit rectam GH productam sic prius ostenditur.

Sit HQ ipsi HC aequalis. Quia igitur qu. ex BD aequale est qu.^{is} ex o et BA; quorum qu. o

majus est 4 qu.^{is} ex CH, erit ideo AD major quam CQ, hoc enim in praec. Theor. ostensum fuit. Sed et triangulum CHQ ex eodem theoremate constat similem esse triang. CGH, et isoscelem. Itaque si super CQ circumferentiae pars descripta intelligatur, capax anguli CGH, ea transibit per H, atque ibidem contingeret rectam GH, similis autem erit circumferentiae quae super AD descripta fuit, nam illa quoque capit angulum aequalem ipsi CGH. Ergo quum sit AD major quam CQ, manifestum est circumferentiam AMFD secare debere rectam GHF.

¹²⁾ Après avoir préparé la solution par les théorèmes qui précèdent, Huygens reprend le problème formulé au début de la pièce en y ajoutant la „Determinatio.”

¹³⁾ Le manuscrit contient une cinquième figure qui se distingue de la quatrième en ce que l'angle CAH y est l'angle obtus du losange. Le texte se rapporte à la fois aux deux figures.

¹⁴⁾ Huygens a souligné cette phrase et il a ajouté en marge: „Vel potius sit qu.^{is} ex o et HC aequale quadratum ex GD.” C'est la modification adoptée dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” et dans la lettre à van Schooten; voir la note 7.

Porro autem ductis MD, FD, constat quidem angulos AFD, AMD singulos aequari angulo CGH. Quapropter erunt qu.^a ex KF et AB simul aequalia qu.^o BD; ¹⁵⁾ sed huic etiam aequalia sunt ex contr.^e qu.^a ex θ et ex AB. Ergo quae eidem aequalia etiam aequalia inter se. Et ablato communi quadrato ex AB erit qu. KF aequale qu.^o ex θ et KF ipsi θ . Eadem ratione et qu. MV quadrato ex θ aequale erit. Quod demonstrandum erat. ¹⁶⁾



¹⁵⁾ Voir le théorème I de la pièce présente.

¹⁶⁾ Une autre démonstration se rencontre plus loin dans le manuscrit N°. 12, aux pages 247 et 248, sous la suscription: „Ex Analsi (11 Febr. 1652) suprâ descriptâ“. Elle a passé avec des modifications légères dans les „Ill. quor. probl. constr.“, où on la trouvera au „Probl. VII.”

VIII.¹⁾

1652.

14 Febr. 1652.

Pappus in principio libri 7.ⁱ ubi de Inclinationibus, problema universale refert. 2) Duabus lineis positione datis inter ipsas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertineat. Quod quidem problema solidum est nisi cum ductis ex puncto dato parallelis ad datas lineas positione, quadratum vel rhombus constituitur. Quos casus jam exposuimus,³⁾ et quomodo optime construantur docuimus. Cum verò solidum est, unam quidem problematis partem resolvit Pappus prop.^c 31 libri 4.ⁱ 4) ubi angulum trifariam fecare docet. 5) aliorum tamen inventa proponens. 6) Quamquam autem parallelogrammum rectan-

¹⁾ Dans cette pièce, empruntée aux pages 197—199 du manuscrit N^o. 12, Huygens reprend (voir les pièces N^o. II et N^o. VI, pp. 13 et 26) le problème solide de mener par un point donné B [Fig. 1] une droite sur laquelle les côtés d'un angle donné CNA découpent un segment RD de longueur donnée. Cette fois il traite le cas où le point donné se trouve à l'intérieur de l'angle donné et le résoud à l'aide d'une hyperbole, coupée par un cercle. Ensuite il s'occupe de la „determinatio” du problème, c'est-à-dire, de la détermination des conditions sous lesquelles la solution est possible; ce qui amène un autre problème solide: celui de trouver la longueur minimale du segment découpé RD.

²⁾ Voir la note 2, p. 239 du Tome XI. Dans l'édition de Hultsch on trouve le passage en question au T. II, p. 670—671.

³⁾ Voir les pièces N^o. IV (p. 19), VI (p. 26) et VII (p. 32).

⁴⁾ Consultez la note 9, p. 228 du Tome XI. Chez Hultsch on trouve la proposition indiquée au T. I, p. 272—275.

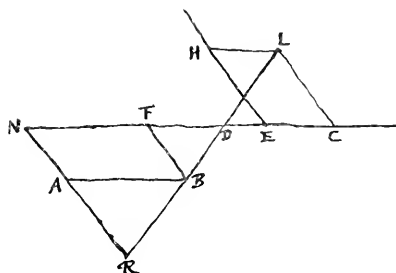
⁵⁾ Voir la „Prop. 32” où Pappus applique la construction de la proposition 31 mentionnée à la trisection de l'angle (p. 62 recto et verso de l'édition de Commandin; Hultsch T. I, p. 274—277).

⁶⁾ Allusion aux phrases suivantes qui précèdent chez Pappus les „Prop. 31 et 32”: „antiqui Geometrae problema jam dictum in angulo,” [la trisection de l'angle], „quod natura solidum est, per plana inquirentes invenire non poterunt, nondum enim ipsis cognitae erant con-

gulam constituat, eadem tamen ratione ope hyperboles componitur, etiam si rectangulam non fit.⁷⁾ Nunc autem eum eadem pertractabimus cum punctum intra angulum datum est, nam et is ope hyperboles expediri potest. Sed et aliam pro rhombo constructionem hinc deducemus.⁸⁾

Esto angulus N et intra ipsum detur punctum B, oporteatque ducere RBD datae lineae aequalem. Factum jam sit, et ducantur BA, BF parallelae ipsis NF, NA, et posita FE ipsi FN aequali, sit quoque EH parallela NA. Producat

[Fig. 1.]



autem RD et ut ipsi RD aequalis BL et ducantur LH, LC ipsis quoque NF, NA parallelae.

Similia igitur constat fieri \triangle^{la} LDC, RBA. Sed latus LD aequale est lateri RB, quoniam tota BL toti DR aequalis: Itaque et LC aequalis ipsi AR, et CD aequalis ipsi AB seu NF, hoc est, ipsi FE, et ablata communi DE, erit EC aequalis DF. Ut autem DF ad FB ita est BA ad AR. Ergo quum ipsi FD sit aequalis EC et ipsi AR aequ. LC hoc est HE erit quoque ut EC ad

FB ita BA ad HE, quare contentum EC, HE aequale contento FB, BA. Est itaque punctum L ad hyperbolen sed et ad circuli circumferentiam, nam datum est B punctum, et data BL aequalis ipsi RD, datum igitur est positio punctum L; dataque propterea etiam linea LB quare et DBR positio data erit, nam cum illa coincidit.

Componetur autem hoc modo. Ducta EH ut in resolutione dictum est, jungatur BE [Fig. 2], eaque producat et sit ipsi EB aequalis EG. Dein per punctum G, circa asymptotos EH, EK describatur hyperbole LG. Centro autem B et semidiametro BL quae aequalis sit lineae datae, describatur circumferentia LO, quae si hyperbolen non attingit, problema construi non poterit, quod data linea fit aequo brevior.

Si vero contingat circumferentia LO hyperbolen LG, erit linea data omnium quae problema efficere possunt brevissima sin denique circumferentia hyperbolen

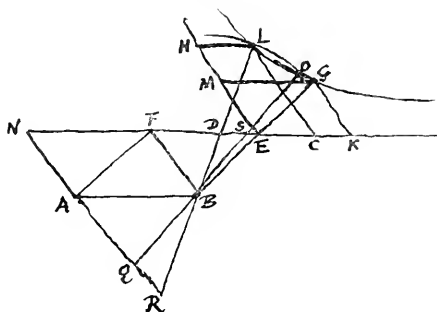
sectiones, & ob eam causam hesitarunt. Postea uero angulum tripartito diuiserunt ex conicis, ad inuentionem infrascripta inclinatione⁹⁾ [la prop. 31] „utentes“. (Commandin, p. 61 recto; Hultsch, T. I, p. 273).

⁷⁾ En effet, le raisonnement de Pappus, reproduit dans la note 9, p. 228 du Tome XI, reste valable quand on remplace, dans la figure 1 de la page 226, les rectangles ABCD et AK par des parallélogrammes. Seulement l'hyperbole décrite par le point K ne sera plus équilatère.

⁸⁾ Voir pour la solution en question la pièce N°. IX, qui suit.

fecet, ut hic in punctis L et O, ducantur inde rectae LBR, OBQ, dico partes earum interceptas DR, SQ problema efficere, hoc est aequales esse ipsi BL, seu lineae datae.

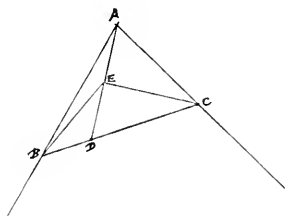
[Fig. 2.]



ideoque erit CD ipsi FE aequalis hoc est ipsi AB sunt autem CD et AB latera similiter posita similium triangulorum CDL, ABR; ergo et DL ipsi BR aequalis erit, et tota BL aequalis DR. sed BL aequalis est lineae datae. Itaque factum est quod proponebatur. Eadem ratione potest ostendi QS ipsi BO seu BL aequalis.

Determinatio autem problematis solida est, nam solâ quidem regulâ et circino inveniri nequit omnium brevissima per punctum B ducta intra angulum N. Qui si rectus est, adeo ut parallelogr. NB sit rectangulum, tum eodem modo brevissima

[Fig. 3.]



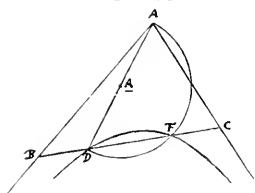
per punctum B ducetur, quo duae mediae proportionales inveniuntur inter lineas FN, NA. ²⁾ Sicut Hero vel Nicomedes. ¹⁰⁾ Sed Heronis quidem inventum etiam ad angulos non rectos hic extendi potest. Etenim dato intra angulum BAC [Fig. 3] puncto D, si oporteat brevissimam ducere omnium quae per idem punctum intra eundem angulum duci possunt; jungatur DA. et in duo aequalia dividatur puncto E. Tum applicetur regula puncto D, eaque moveatur donec reperiantur EB, EC aequales, quod circino sepius

²⁾ Voir la pièce N°. XIV aux pages 62—63, où Huygens démontre que la droite EF de la figure de la page 62 citée sera minimale, quand on a $AF^3 = BA \times BC^2$.

¹⁰⁾ Consultez pour la construction de Nicomède, la „Compositio Nicomedis,” p. 15 de la pièce N°. II. En effet, la droite KE de la figure 2 de cette p. 15, n'est autre, pour le point

tentando facile afflequemur, et jungatur BC, Eritque haec omnium brevissima: ¹¹⁾ atque hac quidem ratione determinari problema potest.

[Fig. 4.]



Aliter quoque ijsdem positis omnium brevissima ducetur, hoc modo.

Per D punctum, circa asymptotas AB, AC describatur hyperbole DF. et super AD semicirculus, qui ubi hyperbolam secabit in F, inde ducatur FD et producat utrimque, atque haec propositum efficiet, eritque BDC omnium brevissima, quae per D duci possunt. ¹²⁾

Aliter quoque, non descripta hyperbolâ, sed semicirculo tantum, moveatur regula secundum punctum D, donec inveniantur BD, FC inter se aequales.

Problema hoc de minima inferius resolutum vide, et calculo demonstratum. ¹³⁾

II, que la droite cherchée de longueur minimale. Dans la construction de Héron, où il s'agit de même de trouver les deux moyennes proportionnelles entre les côtés GL et LA (voir toujours la figure de la p. 15) d'un rectangle donné, la droite LH est divisée en deux parties égales par le point I et la droite EK est supposée construite de manière qu'on ait $IK = IE$; alors, comme dans la construction de Nicomède, on aura $GL : AE = AE : GK = GK : LA$, et la droite KE sera donc identique à la droite cherchée. (On trouve cette construction de Héron p. 6 recto et verso de l'édition de Commandin des „Collectiones mathematicae” de Pappus; Hultsch, T. I, p. 62—65).

¹¹⁾ Voir, pour la démonstration, la troisième partie de la pièce N°. XIV, p. 67.

¹²⁾ Pour déduire cette nouvelle construction de celle de la figure 3, abaissons dans cette dernière figure sur BC les perpendiculaires EE_1 et AA_1 . Alors on aura $BE_1 = E_1C$, $DE_1 = E_1A_1$ et par suite $BD = A_1C$; donc le point A_1 , correspondant au point F de la figure 4, se trouvera à la fois sur le cercle décrit sur AD comme diamètre et sur l'hyperbole passant par D et ayant BA et AC pour asymptotes.

D'ailleurs les méthodes modernes conduisent aisément à ce même résultat. En tournant le segment BC autour du point D (Fig. 4) d'un angle infinitésimal ε et en égalant à zéro l'accroissement $(DC \cotg C - BD \cotg B)\varepsilon$, on trouve; $BD : DC = \tg B : \tg C = \frac{AC}{\cos B} : \frac{AB}{\cos C} = AC \cos C : AB \cos B = CF : FB$, où F est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BC; ainsi le segment BC doit être divisé par les points D et F dans un même rapport, d'où il suit: $BD = FC$.

¹³⁾ Voir la seconde et la troisième partie de la pièce N°. XIV, p. 65—68. La phrase a été ajoutée plus tard.

IX.¹⁾

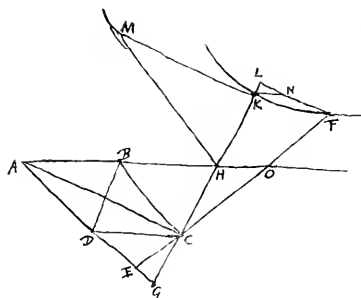
1652.

17 Febr. 1652.

*Rhombo dato ABCD productisque ejus lateribus, oporteat ducere ECO
aequalem datae lineae.*

Factum fit et sit ipsi EO aequalis CF. Itaque erit punctum F ad hyperbolen,

[Fig. 1.]



quae invenietur ut supra, ²⁾ ductis nimirum diametris AC, BD, et GCHK parallelâ DB et HK ipsi BD aequali, et HM parallela BC; erit quaesita hyperbole quae per K describitur circa asymptotos HM, HO. et quoniam HK nunc bifariam dividit angulum MHO, erit KL axis hyperboles, CK latus transversum. Sit KM ipsi CK ad angulos rectos, eritque KM aequalis AC. Vocetur AC seu KM *a*. DB seu HK, *b*. EO, seu CF, *c*. ductâque FL ipsi HK ad angulos rectos, sit $KL \propto x$.

KM potest quartam figurae partem

¹⁾ La pièce se trouve aux pages 200—201 du manuscrit N°. 12. Elle contient une autre solution, préparée par la pièce précédente N°. VIII, du problème de la pièce N°. VII.

²⁾ Voir le second et le troisième alinéa de la pièce précédente.

quae continetur lateri transverso CK et latere recto. ³⁾ itaque HK ad KM ut KM ad $\frac{1}{2}$ lat. rectum. Quare ut HK ad $\frac{1}{2}$ l. rectum, seu ut CK ad lat. rectum ita HK qu. ad KM qu. hoc est ita bb ad aa .

Ergo dicemus porro per 21. lib. Con. ⁴⁾ CK ad latus rectum ut \square CLK ad \square LF

$$bb \text{ ad } aa \text{ ut } 2bx + xx \text{ ad } \frac{2baax + aaxx}{bb} \square \text{ LF}$$

$$\text{fit [ubtr.]} \left\{ \begin{array}{l} \square \text{ CF } cc \\ \square \text{ CL } 4bb + 4bx + xx \end{array} \right.$$

$$\text{fit } \square \text{ LF } cc - 4bb - 4bx - xx \propto \frac{2baax + aaxx}{bb}$$

$$xx \propto \frac{2a^2bx - 4b^2x + bbcc - 4b^4}{aa + bb}$$

$$\text{fiat ut CH } (b) \text{ ad HA } \left(\frac{1}{b} aa + bb \right) \text{ ita LK } (x) \text{ ad KN } \left(\frac{x}{b} aa + bb \right) \propto$$

$$\propto y \text{ ergo } x \propto \frac{by}{aa + bb} \text{ hoc vero ponendo pro } x \text{ fit}$$

$$yy \propto \frac{2aa - 4bb}{aa + bb} y + cc - 4bb$$

Unde constructio quae sequitur.

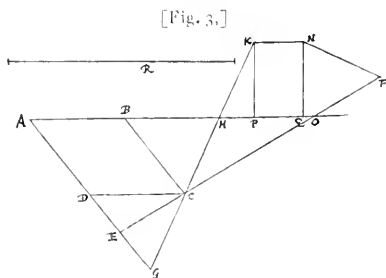
³⁾ Voir la note 51 de la page 114 du Tome XI. La „figura,” dont il est question, est le rectangle construit sur le diamètre CK et le „latus rectum.”

⁴⁾ Voir la note 12 de la page 300 du Tome XI.

⁵⁾ Cette droite KN est supposée parallèle à AB.

COMPOSITIO.

Ponatur ipsi BA aequalis BH et ducatur GCH, et producat ut fit HK aequalis HC. ex K ducatur KP ipsi AH ad angulos rectos. et ponatur AQ quae possit quadr. AP unâ cum differentia quadratorum ex R et GH, debet autem R non minor data esse quam HG. Porro perfectio rectangulo PN, ducatur NF⁶⁾ ipsi GK ad angulos rectos, et ex C ponatur CF ipsi R datae aequalis, et producat utque in E. dico partem ejus interceptam OE datae R aequalem esse.



Optimam constructionem hujus vide inferius. ⁷⁾

⁶⁾ Posant $\frac{a^2 + 2b^2}{1/a^2 + b^2} = 1/\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{1/a^2 + b^2} = AH + HP = AP = p$, l'équation quadratique du texte peut s'écrire: $y^2 + 2py = c^2 - 4b^2$. On a donc $y = -p + 1/p^2 + c^2 - 4b^2$; où c est égale à la longueur donnée R ; donc $1/p^2 + c^2 - 4b^2 = AQ$ par construction et $y = AQ - AP = PQ = KN$; mais cet y représente le segment KN de la Fig. 1 et puisque, par construction, les points K des deux figures sont identiques, il en est de même des points N , des droites NF et des points F . Inutile de dire que la racine $y = -p + 1/p^2 + c^2 - 4b^2$ amène les droites, passant par C , desquelles des segments de la longueur donnée sont découpés par les côtés des angles extérieurs du losange, au sommet A ; mais il semble bien que Huygens ne s'est jamais aperçu que les quatre droites, menées par le sommet d'un losange, de telle manière que les côtés des angles extérieurs et de l'angle intérieur, qui appartiennent au sommet opposé, en découpent des segments de même longueur, ne sont que les quatre solutions d'un seul et même problème.

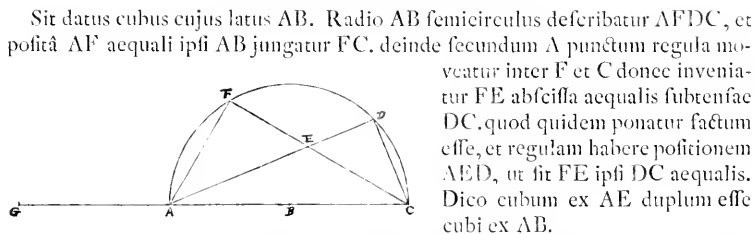
⁷⁾ Voir la seconde partie de la pièce N°. XIII, p. 58. La phrase a été ajoutée plus tard.

N.^o

1652.

Kal. Mart 1652.

Cubum invenire dati cubi duplum.



Producatur enim CA et sit AG ipsi AE aequalis. Propter triangulos similes igitur est EC ad CD hoc est EF, ut EA ad AF. Et componendo CF ad FE ut utraque simul EA, AF, hoc est, GB ad AF, et permutando CF ad GB ut FE ad AF. Quare ut CF quadratum ad quadr. GB ita quadr. EF ad qu. FA. Et componendo ut quadrata ex CF et ex GB ad qu. ex GB, ita quadrata EF et FA, hoc est, quadratum EA ad qu. AF. Quadrata autem ex CF et GB simul aequalia sunt rectangulo GCA et qu.^o ex AG: Quadratum enim GB aequale est rectangulo

¹⁾ La pièce a été empruntée aux pages 203—206 du manuscrit N^o. 12. Elle contient une solution exacte du problème de la duplication du cube; supposant qu'il soit possible de construire la figure du texte, où $AF = AB$, de telle manière qu'on ait $EF = DC$. En outre elle donne une solution approximative du même problème. Ces solutions ont été reproduites, sous une autre rédaction, dans les „Illustrum quorundam problematum constructiones” de 1654, comme „Problema II”.

CGA et quadr.° AB seu AF (10.2.).²⁾ quare addito utrinque qu.° FC, erunt quadrata GB, FC simul aequalia rectangulo CGA una cum quadratis AF, FC, hoc est una cum quadrato AC. Estque rectangulum CGA cum qu.° AC aequale rectang.° GCA cum qu.° GA. Itaque et quadrata GB, FC simul aequalia rectangulo GCA cum qu.° GA, sicut diximus.

Ut igitur rectang. GCA cum qua. AG ad qu. GB ita est qu. EA ad qu. AF, hoc est, ita qua. GA ad qu. AB. Et permutando, ut rectang. GCA cum qu.° AG ad qu. AG ita qu. GB ad qu. AB. Et dividendo, ut rectang. GCA ad qu. AG ita qu. GB dempto qu.° AB hoc est rectang. CGA ad qu. AB. Et permutando rursus ut \square GCA ad \square CGA, hoc est ut AC ad AG ita qu. AG ad qu. AB. Quare cubus ex AG seu AE duplus erit cubi AB. Quod erat dem. ³⁾

Lineam verò AD ita ducere ut sit DC subtensa aequalis abscissae EF, atque adeo cubum duplicare vel cuicumque solido dato aliud simile duplum constituere, eà poterimus ratione quam deinceps trademus;⁴⁾ quā quidem problema quod naturā solidum est per plana solutum videri posset, ni demonstratio contrarium evinceret.

Etenim posita sicut ante AF aequali AB, Hoc est posito arcu AF triente periphæriæ AFDC : Si porro arcus CD statuatur ejusdem periphæriæ quadrans, junganturque FC, DA dico cubum ex AE majorem quidem fore cubo duplo ex AB. at si pars bimillesima ex AE recidatur, residui cubum minorem fore duplo cubi AB.

Manifestum enim est AE secantem esse anguli partium $37\frac{1}{2}$ qualium periphæria

²⁾ Lisez (6.2. Elem.), comme on le trouve dans les „Hl. quor. probl. constr.“, au lieu cité dans la note précédente. C'est la ressemblance du début des deux propositions 10.2 et 6.2 qui a causé l'erreur. Voici d'ailleurs cette dernière proposition : „Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quaedam linea in rectum adiciatur : Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato ex dimidia, aequale est quadrato à linea quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.“ (Clavius, p. 178.)

³⁾ A cause de la forme que Huygens a cru devoir donner à cette démonstration, elle semble plus compliquée qu'elle ne l'est réellement. De la similitude des triangles DEC et FEA Huygens déduit la proportion : $(EC + CD)^2 : (EA + AF)^2 = CD^2 : AF^2$; mais puisqu'on a par construction $DC = EF$ et $AF = AB$, on trouve, en posant $AB = r$, $AE = b$, $(EC + CD)^2 = CF^2 = AC^2 - AF^2 = 3r^2$; $CD^2 = EF^2 = b^2 - r^2$. La proportion peut donc s'écrire :

$$3r^2 : (b + r)^2 = (b^2 - r^2) : r^2$$

d'où l'on déduit successivement en appliquant, à l'exemple de Huygens, les propriétés bien connues des proportions :

$$\begin{aligned} 4r^2 + 2br + b^2 : (b + r)^2 &= b^2 : r^2 \\ 4r^2 + 2br : b^2 + 2br &= b^2 : r^2 \\ 2r : b &= b^2 : r^2. \\ b^3 &= 2r^3. \end{aligned}$$

⁴⁾ Voir la construction approximative, qui va suivre.

AFDC 180 continet. nam AF arcus est partium 60, et CD partium 45; itaque FD, 75. at angulus FAD subduplus est ejus qui ad centrum, itaque FAD angulus est partium $37\frac{1}{2}$. ubi dicebamus. ⁵⁾ AF autem aequalis est ipsi AB radio; qui statuatur partium 100000. ad demonstrationem vero hisce duobus theorematibus opus habebimus quorum posterius est Pellij. ⁶⁾

THEOR. 1. *Si cujuslibet arcus, qui minor sit 45 partibus, tangentis quadratum auferatur à quadrato radij; residuum dividatur per tangentis ejusdem duplum, oriatur tangens complimenti arcus illius dupli.* ⁷⁾ Vel sic. *Duplum tangentis est ad sinum tangens et radij, sicut eorundem differentia ad tangentem complementi arcus prioris dupli.*

THEOR. 2. *Si tangens cujuslibet arcus minoris 45 partium, ducatur in duplum quadratum radij. Productum dividatur per differentiam quadratorum radij et tangentis, oriatur tangens arcus dupli* ⁸⁾

Esto itaque arcus alicujus ignoti tangens 26800; invenietur per theor. secundum arcus dupli tangens 57747 &c. Sed haec major est tangente 30 gr. nam tangens 30 gr. est ad radium potentia ut 1 ad 3, et longitudine ut 57735 ad 100000. Itaque arcus duplus ignoti arcus major est quam 30 gr. ac proinde arcus cujus tangens 26800, major quam 15 gr.

Esto denuò alterius alicujus arcus tangens 76700, Erit per Theor. nostrum, tangens complimenti arcus istius dupli 26839. Haec autem tangens major est quam 26800. Ergo dictum complementum apparet majus esse quam 15 gr. Atque ideo arcus iste cujus dupli complementum erat, id est, arcus cujus tangens ponebatur 76700, minor erat quam $37\frac{1}{2}$ gr. nam bis $37\frac{1}{2}$ hoc est 75 gr. una cum gr. 15 quadrantem circuli expleat. Itaque 76700 minor est tangente $37\frac{1}{2}$ gr. hoc est minor linea FE, nam haec tangens est $37\frac{1}{2}$ gr. Quadratum igitur ex AF quae est 100000 una cum qu.° ex 76700 simul minora sunt qu.° ex AE. Illis autem duobus simul quadratis adhuc minus est quadr. ex 126000; itaque

⁵⁾ Huygens a biffé toute la partie de la pièce qui suit; ce qu'il fit probablement lorsqu'il prépara en 1654 la publication des „Illustrium quorundam problematum constructiones“. Ajoutant alors en marge le mot „Puerilia“, il remplaça toute cette partie par la seule phrase: Ergo AE ex tab. sin. 126047. Unde propositum facile comprobatur. Comparez les „Ill. quor. probl. constr.“ au „Problema II.“

Toutefois, nonobstant l'annotation de Huygens, nous n'avons pas supprimé cette partie du texte parce qu'il nous semblait curieux de montrer jusqu'à quel point Huygens, à cette époque, croyait devoir se conformer à la manière de démontrer des anciens, même dans une matière qui s'y prêtait fort peu; déguisant ainsi entièrement la marche qu'il avait suivie pour arriver à ses résultats.

⁶⁾ Voir, sur Pell, la note 2, p. 14 du T. I. Il s'agit ici du théorème principal de l'ouvrage cité dans la note 5, p. 176 du T. I. On le rencontre la première fois à la page 13 de cet ouvrage.

⁷⁾ En notation moderne; $\cotg 2\alpha = (1 - \tg^2 \alpha) : 2 \tg \alpha$.

⁸⁾ $2 \tg \alpha : (1 - \tg^2 \alpha) = \tg 2\alpha$.

126000 omnino minus erit quam AE. atqui cubus ex 126000 qui est 2000376000000 major est duplo cubo ex AF seu ex 100000. Igitur multo magis cubus ex AE major erit duplo cubo ex AF seu ex AB. quod erat primum.

Nunc autem ostendemus, lineam AE diminutam parte sui bisimilefima, producere cubum minorem duplo cubo ex AB.

Sit tangens alicujus arcus 26790. Invenietur per Theorema 2^{um} tangens arcus dupli 57722 &c. Haec autem minor est tangente gr. 30, quam suprà diximus esse 57735. Ergo arcus cujus tangens ponebatur 26790 minor est quam 15 gr.

Rursus alterius alicujus arcus sit tangens 76737; Ergo per theorema 1^{um} erit tangens complimenti arcus istius dupli 26789 &c. Haec verò tangens minor est quam 26790. Ergo cum 26790 ostensa fuerit minor tangente gr. 15, erit omnino 26789 minor quoque tangente gr. 15. Itaque cujus arcus tangens erat 76737, ejus arcus dupli complementum minus est quam 15 gr. Ideoque dictus arcus duplus major est quam 75 gr. et ipse arcus cujus tangens 76737, major quam $37\frac{1}{2}$ gr. Est autem FE tangens $37\frac{1}{2}$ gr. Ergo FE minor quam 76737. Quadratum igitur ex AF et ex 76737, simul majora erunt quadrato ex AE.

Dictis autem quadratis duobus majus est quadratum quod fit ex 126050; Itaque 126050 omnino majus erit quam AE. Cubus autem ex 125990 minor est duplo cubo AB. Major igitur est ratio 126050 ad 125990 quam ipsius AE ad latus cubi qui duplus sit cubi ex AB. Sed ratione 126050 ad 125990 seu 12605 ad 12599 adhuc major est ratio 2000 ad 1999. Itaque ratio AE ad dicti cubi dupli latus multo minor est ratione 2000 ad 1999. Si igitur AE divisa sit in partes aequas bisimile; unâ earum demptâ, reliqui cubus minor erit duplo cubo ex AB. quod erat ostendendum.

2 mart. 1652.

Subtenfa arcus aequalis arcibus AF et DC, est latus cubi subdupli ejus qui ex AC. *)

*) La remarque a été ajoutée plus tard. Il s'agit naturellement de la solution exacte. Appliquant la formule bien connue :

$2 \text{ corde}(AF + DC) = \text{corde AF} \cdot 1\sqrt{4 - (\text{corde DC})^2} + \text{corde DC} \cdot 1\sqrt{4 - (\text{corde AF})^2}$
qu'on déduit du théorème de Ptolémée, on trouve, d'après les calculs de la note 3, qu'elle exige :

$2\sqrt{4 - 1\sqrt{5 - 1\sqrt{4}} + 1\sqrt{3(\sqrt{4} - 1)}};$
c'est-à-dire :

$\left\{ 2\sqrt{4 - 1\sqrt{5 - 1\sqrt{4}}} \right\}^2 = 3(\sqrt{4} - 1);$
ou bien :

$\sqrt{4} + 2 + \sqrt{4} - 1 = 1\sqrt{5 - 1\sqrt{4}};$
ce qu'on vérifie aisément en élevant au carré.

La remarque est donc juste.

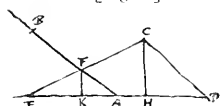
XI.¹⁾

1652.

9 Mart. 1652.

Datis positione duabus lineis angulum comprehendentibus AB, AE, et puncto extra angulum C: ducere CFE ita ut comprehensa FE sit aequalis abscessae FB ad datum punctum B in linea AB.

[Fig. 1.]



Ducatur CD parallela BA et occurrat produeta EA in D. Dantur igitur AD et DC. Sed et perpendicularis CH data erit quoniam datus angulus EAB vel ADC. Ducatur FK ipsi EA fimiliter perpendicularis.

Sit $AB \propto a$; $AD \propto b$; $DC \propto c$; $DH \propto d$; $AE \propto x$.

ED $(x + b)$ ad DC (c) ut EA (x) ad AF $\left(\frac{cx}{x+b}\right)$; ergo $a - \frac{cx}{x+b} \propto EF$
vel BF. q.EF $aa - \frac{2acx}{x+b} + \frac{ccxx}{xx + 2bx + bb}$.

ED $(b + x)$ ad DH (d) ut EA (x) ad AK $\left(\frac{dx}{b+x}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} xx \text{ q.EA} \\ \frac{ccxx}{xx + 2bx + bb} \text{ q.AF} \end{array} \right\} \text{ad[de]}$$

¹⁾ La pièce est empruntée aux pages 207—209 du manuscrit N°. 12. Elle contient deux solutions du problème des deux moyennes proportionnelles avec l'analyse qui a conduit a ces solutions, lesquelles ont été reproduites avec des changements de rédaction plus ou moins importants dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones“ de 1654 au „Probl III. Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.“

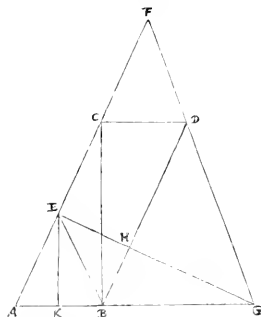
$$\begin{array}{rcl}
 ax + \frac{cax}{x+b} + \frac{bb}{x+b} \square EA + q.AF & & \\
 au - \frac{2cax}{x+b} + \frac{cax}{x+b} q.EF & & \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Subtr.} \\
 \hline
 AK. 13.2^{\text{di} 2}) \quad \frac{ax - aa + \frac{2cax}{x+b}}{2x} \propto \frac{dx}{b+x} AK \\
 \hline
 x^3 + bxx - aax + 2cax - baa \propto 2dxx \\
 x^3 + b \mid xx + 2ac \mid x - baa \propto 0 \\
 -2d \mid \quad -aa \mid
 \end{array}$$

Si ponatur $b \propto 2d$ et $a \propto 2c$ erit $x^3 \propto baa$ hoc est, erit AB et AD inter, una
duarum mediarum proportionalium AE.

Hinc inventae sunt constructiones duae sequentes.

10 MARCH.

[Fig. 2.]



*Duas medias proportionales invenire inter datas
lineas.*

Sint datae duae AB et AC, quae sic disponantur ut angulus CBA sit rectus. Compleatur parallelogrammum ABDC, et producat^{ur} AB. Et dividā AC per medium in E, ducatur EHG ita ut abscissae HD sit aequalis HG.

Hoc autem vel sepius tentando assequi possumus, vel ope Hyperboles sicut infra docebimus ³⁾ Sed factum jam ponatur, et ducatur GDF occurrens productae AC in F. Dico duarum CA, AB medias esse proportionales BG et FC. ⁴⁾ Jungatur enim EB et fit EK ⁵⁾ ipsi AB ad angulos rectos. Quia igitur BE aequalis EA, erit quoque BK aequalis

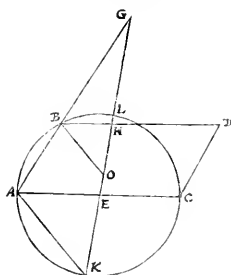
²⁾ Voir la note 18, p. 30 du Tome présent.

3) Voici cette construction telle qu'on la déduit de celle qu'on trouve dans le second alinéa qui suit dans la présente pièce l'en-tête «*Aliter*». Imaginons sur le segment FG un point N , tel qu'on ait $GN = FD$, alors ce point se trouve en premier lieu sur l'hyperbole qui passe par le point D et qui a AB et AC pour asymptotes, et en second lieu (puisque on a $EG = EF$ aussi bien que $HG = HD$) sur le cercle qui passe par D et qui a E pour centre. On peut donc construire le point N , mener par N et D la droite EG , et tirer enfin EG .

4) On remarquera que cette seconde des deux moyennes proportionnelles ne s'est pas présentée dans l'analyse.

5) La partie du texte que nous venons de reproduire sous la date du 10 mars constitue la rédaction primitive de la solution du problème, où on reconnaît encore aisément les résultats de l'analyse algébrique qui précède. Seulement la notation est changée; l'angle donné BAE de la

[Fig. 4.]



Et jungatur AK, eique parallela ducatur BO. Itaque similes sunt trianguli AEK, BHO; et quia AE aequalis EK, etiam BH, HO aequales erunt. Sed et HG, HD inter se aequales sunt; igitur tota OG aequalis BD, hoc est diametri AC vel LK. Et ablata communi LO, relinquuntur aequales inter se GL, OK. Est autem rectangulum KGL aequale rectang.^o AGB, ideoque ut KG ad GA ita est BG ad GL. Sed ut KG ad GA ita propter triang.^{os} similes est quoque OG ad GB, et ita reliqua OK hoc est LG ad BA. Ergo ut OG hoc est AC ad GB ita BG ad GL et LG ad AB. Quod erat demonstrandum.

5 Jun. 1652. ¹³⁾

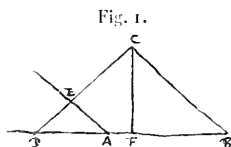
¹³⁾ La date se rapporte au dernier alinéa. Comparez la note 11.

XII.¹⁾

1652.

16 Mart. 1652.

Datis positione lineis AD, AE angulum comprehendentibus, et puncto extra angulum, C. Ducere CED rectam, et facere AD ipsi CE aequalem.



Factum jam sit, et ducatur CB parallela EA. et sit CF ipsi DB ad angulos rectos.

Vocetur AB b ; BC c ; BF d ; DA x .

BA (b) ad BD ($b+x$) ut CE \propto AD (x)

ad CD $\left(x + \frac{cx}{b}\right)$

$$\frac{bb + 2bx + xx \text{ q. DB}}{cc \text{ q. BC}} \left\{ \begin{array}{l} \text{a[dde]} \end{array} \right.$$

$$\frac{bb + 2bx + xx + cc}{xx + \frac{2x^3}{b} + \frac{x^4}{bb} \text{ q. CD}} \left\{ \begin{array}{l} \text{s[ubtr].} \end{array} \right. \quad \frac{b + x \text{ DB}}{2d \text{ 2FB}} \left\{ \begin{array}{l} \text{m.} \end{array} \right.$$

$$bb + 2bx + cc - \frac{2x^3}{b} - \frac{x^4}{bb} \propto 2db + 2dx \text{ 2 } \square \text{ DBF}$$

$$\frac{x^4 + 2bx^3 + 2dbb}{-2b^3} \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{2db}{-cc} \left\{ \begin{array}{l} bb \propto 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

¹⁾ La pièce occupe les pages 210 et 211 du manuscrit N°. 12. Elle contient une troisième solution du problème des deux moyennes proportionnelles avec l'analyse qui l'a amenée. Cette solution a été reproduite, avec de légères modifications, dans les „Ill. quor. prob. constr.” de 1654, comme la troisième et dernière solution du „Probl. III. Datis duabus rectis duas medias invenire.”

Si $dbb - \frac{1}{2}ccb - \frac{1}{2}b^3$ quod id est quod in quantitate cognita ductum est in $2b$, aequale esset $-2b^3 + 2dbb$, quod in x ductum est; tota aequatio dividi posset per $x + 2b$ et fieret $x^3 + 2dbb - 2b^3 \propto 0$ et $x^3 \propto -2b \mid bb$

adaequantur igitur $dbb - \frac{1}{2}ccb - \frac{1}{2}b^3 \propto -2b^3 + 2dbb$ fit $cc \propto 3bb - 2db$. Si ergo haec aequalia à principio ponantur, erit $x^3 \propto -2b \mid bb$ unde erit DA una me-

diarum duarum inter AB et duplam AF. Nam dupla AF est $2b - 2d$. Datis itaque duabus lineis poterimus duas medias proportionales invenire eo modo qui subiungitur.

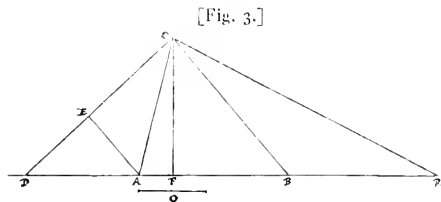
Duas medias proportionales invenire.

Sint datae AB et Q quibus duas medias invenire opus sit. Dimidia Q ponatur aequalis AF, et fit BR aequalis AB. Et ex F erigatur perpendicularis FC, et ipsi RA aequalis ponatur RC, et jungatur BC, ²⁾ eique parallela ducatur AE. Et applicatâ regula ad punctum C, moveatur ea quousque positionem habeat CD, faciens AD aequalem CE.

Dico inter AB et Q duas medias inventas esse CE, ED. ³⁾

Jungatur enim CA. Igitur quia aequales sunt RA, RC et angulus CFA rectus, erit RA ad AC ut AC ad duplam AF, hoc est Q. ac proinde quadratum CA aequale contento RA, Q. quadratum autem CA cum qu.° AD et duplo □° DAF

hoc est rectang.° DA, Q aequatur qu.° DC (12. 2. El.) ⁴⁾ Igitur qu. DC aequabitur qu.° DA una cum rectangulis DA, Q; AR, Q; hoc est una cum contento DR, Q. Quadratum vero DA aequale est qu.° EC; igitur ab aequalibus aequalia auferendo erit contentum DR, Q aequale differentiae qu.°rum



²⁾ L'analyse qui précède, exige qu'on ait $c^2 = 3b^2 - 2db$; c'est-à-dire $BC^2 = 3AB^2 - 2BF \cdot AB$. Or d'après la construction indiquée on a, en effet, $BC^2 = CR^2 - BR^2 = 2BF \cdot BR = 4AB^2 - AB^2 = 3AB^2 - 2BF \cdot AB$.

³⁾ Ici, comme dans la pièce précédente (voir la note 4, p. 50), la seconde moyenne proportionnelle ne s'est pas présentée pendant le traitement analytique du problème; mais elle a été cherchée et découverte après coup.

⁴⁾ Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

DC, CE. Quia autem DB et DC lineae similiter dividuntur in punctis A et E, est quadr. DB ad qu. AB ut qu. DC ad qu. CE; et dividendo et convertendo igitur qu. AB ad differentiam qu.^{orum} DB, AB ut qu. EC ad differentiam qu.^{orum} DC, CE; et permutando. Est autem differ.^a qu.^{orum} DB, BA aequalis rectangulo RDA, nam hoc duobus \square is DAB et qu.^o AD aequale est; Et dictum est differentiam qu.^{orum} DC, CE aequari contento DR, Q. Itaque quadr. AB est ad EC qu. ut \square RDA ad contentum RD, Q, hoc est ut AD ad Q. Ut autem qu. AB ad qu. EC ita est AB ad ED longitudine; nam BA est ad AD, hoc est, CE, ut CE ad ED. Igitur ut AB ad ED ita est AD ad Q. Et permutando, ut AB ad AD ita ED ad Q. Atqui ut AB ad AD hoc est CE, ita diximus esse CE ad ED. Ergo ut AB ad CE ita CE ad ED et ED ad Q. Quod erat ostendendum.

19 Mart. 1652. ⁵⁾



⁵⁾ La date se rapporte, d'après une légère différence dans l'écriture, à la démonstration géométrique à commencer par le mot „Jungatur.”

Illud autem hic aliter ostendendum est, quod ad lineam HE poni potest AE ipsi G aequalis. fit RS aequalis RB et jungatur AS. Quoniam igitur in triangulo BAS à vertice ad mediam basin ducta est AR, erunt quadrata BR et RA, simul sumpta, hoc est qu. BA cum duplo qu.^o AR, subdupla quadratorum BA, AS. itaque qu. AB bis sumptum cum quadruplo qu.ⁱ AR, hoc est cum qu.^o RL, aequatur qu.^{is} BA, AS. quare ablato utrimque qu.^o BA, erit qu. AS aequ. quadratis BA et RL, ac proinde minus quam quadr. AH. Est igitur AS minor quam AH; sed major est quam AR: itaque punctum S cadit inter R et H, ergo RH major quam RS vel RB. et quum propter triangulos similes, fit RH ad HP ut RB ad BA, erit quoque HP major quam BA, et quadr. HP majus quadr.^o AB. at qu. HP cum qu.^o PA aequatur qu.^{is} BA et G; ergo quum qu. HP sit majus quam qu. AB, erit invicem PA qu. minus quam qu. G. patet itaque quod si centro A circumferentia describatur semidiametro AE aequali G, ea lineam HE in duobus punctis secabit. ⁵⁾

⁵⁾ C'est-à-dire aux points E et e de la figure; lesquels amènent les solutions FN et f_n .

XIV. ¹⁾

1652.

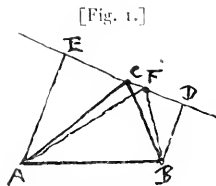
15 Sept. 1652.

DE MAXIMIS ET MINIMIS.

[PREMIÈRE PARTIE.]

Ostenditur quae ratio sit regulae Fermattij, cujus exempla inferius à Schotenio ascripta sunt, ²⁾ dein alia docetur brevior. ³⁾

Esto data positione recta ED et puncta A, B: oporteatque invenire in ED punctum C, unde ductis CA, CB, quadrata earum simul sumpta sint minima quae esse possint. ⁴⁾ Sit AE $\propto a$,



[Fig. 1.]

BD $\propto b$ (hae autem perpendiculares intelliguntur ad ED quae sit e). Secundum Fermattij regulam ponitur primum EC si velinus $\propto x$ unde summa quadratorum AC, CB invenitur $aa + 2ax - 2ex + ee + bb$. Deinde pro eadem EC ponitur $x + y$, indeque inventâ rursus summâ quadr. ^{orum} AC, CB $aa + 2ax + 2yy +$

¹⁾ La pièce, que nous avons divisée en trois parties, se trouve aux pages 217—225 du manuscrit N^o. 12. La première partie contient une exposition de la méthode „De maximis et minimis” de Fermat, suivie d’une autre méthode, inventée à cette occasion: la seconde une modification, apportée par Huygens à la méthode de Fermat, avec application à un problème suggéré par la pièce N^o. VIII; la troisième la démonstration d’une construction simple par laquelle Huygens avait résolu le problème en question.

²⁾ Consultez sur la méthode de Fermat et sur les exemples de van Schooten, qui se trouvent aux pages 284—287 du manuscrit N^o. 12, la page 19 du Tome XI.

³⁾ Il s’agit de la méthode dont l’exposition commence avec le second alinéa de la page suivante; mais voyez plus loin la note 13.

⁴⁾ On retrouvera le même exemple dans la „Demonstratio regulae de maximis et minimis”, citée dans la note 1 de la Lettre N^o. 2435 (p. 95 du T. IX).

+ $4xy - 2cy - 2cx + cc + bb$, horum aequatio instituitur ubi aequalibus ablatis utrimque fit $2xy + 4xy \propto 2cy$. Tum per y dividitur fitque $2y + 4x \propto 2c$. Denique termini in quibus y reperitur rejiciuntur ut hic $2y$, et restat $4x \propto 2c$ et $x \propto \frac{1}{2}c$. Horum ratio ut intelligatur oportet quantitatem y ab initio alicujus magnitudinis lineam denotare ut CF; Illud enim revera quaeritur, nimirum EC existente $\propto x$ quanta debeat esse CF, ut ductis FA, FB, harum duarum quadrata aequentur quadratis CA et CB. Semper quippe ubi maximum vel minimum quaeritur, utrimque casus aequalitatis existit. Itaque quum in aequatione inveniatnr $-4x + 2c \propto 2y$ vel $c - 2x \propto y$ hoc significat, si x , EC, pro determinatae magnitudinis linea sumatur tum CF, y , fore $c - 2x$, vel si certa statuatur CF, y differentia nempe duarum EC, EF, tum EC, x fore $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}y$. Patet autem, quanto minor statuatur y , tanto minus differre x ab $\frac{1}{2}c$ quare si aequalis nihilo sit y , erit x aequalis $\frac{1}{2}c$. Hincque manifestum est, quod si EC ponatur $\propto \frac{1}{2}ED$ et ducantur CA, CB harum quadrata minima erunt quae esse possunt, tunc enim casus aequalitatis nullus esse poterit, et ponendo CF quamlibet exiguum si major sit quam nihil, erunt quadrata FA, FB majora quam CA, CB. ⁵⁾

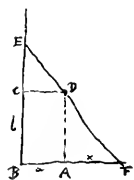
Illud autem quod modo dictum est considerans, quod nempe ubi de maximis vel minimis inquiritur, semper utrimque aequalitatis casus existit, alium quoque modum ad ea determinanda inveni. Animadverti enim, quod si problema de maximo vel minimo determinando propositum, sic resolvatur quasi non maximum vel minimum sed dato aequale quaeramus, tum semper aequatio invenietur in qua radix quaesita habebit duos valores, quorum uterque proposito satisfaciet, qui quidem diversi erunt; at quanto minus inter se differunt, tanto propius ad casum determinationis accedunt, ita ut ubi alter alteri aequalis existit ibi sit determinatio minimi vel maximi. Ubi igitur quaerendo dato aequale, ut dixi, ad aequationum perveneris, et volueris ex ea maximum vel minimum reperire, ita ipsam expendes tanquam duos valores habentem, sibi mutuo aequales, itaque scibis singulos ejus terminos cum singulis terminis alius aequationis comparari posse quae oritur ex multiplicatione radicis quaesitae, multatae quantitate sibi aequali, in seipsam. quod productum si non tot habet dimensiones quot aequatio proposita, rursus ducendum erit in aliam quantitatem quae deficientes alteri dimensiones contineat, suppleatque; secundum ea quae docet Cartesius lib. 2. Geom. ubi tangentes invenire docet. ⁶⁾ Hoc pacto si punctum C quaesiverimus in exemplo praecedente,

⁵⁾ Huygens ajoute en marge: „Ponendo y pro differentia radicum, ita ut certam lineam significet, quaeritur quanta futura sit radix minor, ut aequalia sint quadrata AC, CB quadratis AF, FB.” Il s'agit ici des deux racines qu'on obtient en égalant l'expression $aa + 2xx - 2cx + cc + bb$ à une constante.

⁶⁾ La méthode de Descartes, pour trouver les conditions sous lesquelles une équation algébrique quelconque possède deux racines égales, est exposée aux pages 418—423 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery; où on lit: „De plus, il faut considerer que, lorsqu'il y a deux

oportet inventam fummam quadratorum AC, CB, aequare certo spatio dd , quasi propositum habeamus invenire punctum unde ductis CA, CB, quadrata earum spatio alicui dd aequalia habeantur. Itaque scribe $aa + 2xx - 2cx + cc + bb \propto dd$, vel $xx - cx + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}bb \propto 0$. Postea aliam aequationem finge ponendo $x \propto e$, et $x - e \propto 0$, quod ductum in seipsum faciet $xx - 2ex + ee \propto 0$. Si itaque praecedens aequatio minimi determinationem continet, debet habere x duos valores aequales, ideoque singulos ejus aequationis terminos singulis terminis posterioris aequare licet. Primus utrimque est plane idem, itaque secundus comparetur faciendo $-cx \propto -2ex$ unde invenitur $e \propto \frac{1}{2}c$ hoc est $x \propto \frac{1}{2}c$. Quod inveniendum erat. Caeterum comparando terminos postremos $\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}dd \propto ee$, invenietur quantitas $dd \propto aa + cc - 2ee + bb$ hoc est, $dd \propto aa + bb + \frac{1}{2}cc$; nam $-2ee$ est $-\frac{1}{2}cc$, quoniam inventum fuit $\frac{1}{2}c \propto e$. Et hoc quidem determinationem exhibet in casu quo datum foret problema ut dato aequale quaeratur, deberet enim dd non minus dari quam $aa + bb + \frac{1}{2}cc$; sed cum maximum vel minimum quaeritur sufficit invenisse quocunque modo quantitatem x ; et quoniam dd tunc tantum imaginarium est, oportet invenire x aequalem quantitati cognitae quae non admixtum habeat d , quod semper fieri potest.⁷⁾

[Fig. 2.]



Rationem autem comparisonis aequationum mox ostendam, ubi exemplum cubicae aequationis explicavero. Sint lineae angulum rectum continentes BE, BF et datum intra angulum punctum D, oporteatque ducere EDF rectam omnium brevissimam.⁸⁾ Ductis perpendicularibus DC, DA datae sunt $BC \propto b$ et $BA \propto a$. Sit autem $AF \propto x$ ergo quoniam AF ad AD ut DC ad CE erit haec $\propto \frac{ab}{x}$ et tota BE $\propto ab + \frac{ab}{x}$; cujus quadratum $\frac{bbxx + 2ab^2x + aabb}{xx}$ addatur ad quadratum BF $aa + 2ax + xx$ summa est

racines egales en vne equation, elle a necessairement la mesme forme que si on multiplie, par soy mesme, la quantité qu'on y suppose estre inconnüe, moins la quantité connuë qui luy est égale; & qu'après cela, si cette dernière somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par vne autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque : afin qu'il puisse y avoir separement equation entre chascun des termes de l'une & chascun des termes de l'autre."

Ainsi, pour traiter une équation de la sixième dimension, c'est-à-dire du sixième degré, Descartes égale identiquement le premier membre de l'équation à l'expression : $(yy - 2ey + ee)(y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4)$.

⁷⁾ Huygens ajoute en marge : „aliquando ex aequatione quadrata, etiam tertius terminus comparari debet ipsi ee , nempe si in secundo termino quantitas d habebitur."

⁸⁾ Ce problème s'est présenté à Huygens à propos de la „determinatio" du problème, traité dans

$$\frac{bbxx + 2abbx + aabb}{xx} + \frac{aaxx + 2ax^3 + x^4}{xx} \propto dd \text{ qu. EF,}$$

imaginari enim oportet lineam EF datae d aequalem inveniendam esse, itaque erit

$$\begin{aligned} x^4 + 2ax^3 + aaxx + 2abbx + aabb &\propto 0 \\ &+ bbxx \\ &- ddxx \end{aligned}$$

Formetur porro alià aequatio quarum haec comparetur. Sit $x \propto e$ vel $x - e \propto 0$ quod in se ductum dat $xx - 2ex + ee \propto 0$ caeterum quoniam duae hic dimensiones defunt per aliam quantitatem multiplicetur quae secundum Cartesium erit $xx + fx + hh$

$$\begin{aligned} \text{fitque } x^4 + fx^3 + hhxx + eefx &\propto 0 \\ &- 2ex^3 + eexx - 2ehhx \\ &- 2efxx \end{aligned}$$

Comparetur terminus secundus hujus aequationis cum secundo praecedentis ergo $f - 2e \propto 2a$ et $f \propto 2a + 2e$. Porro ultimus cum ultimo ergo $eehh \propto aabb$ et $hh \propto \frac{aabb}{ee}$, nunc denique penultimus cum penultimo aequationis prioris; nam tertius cum tertio comparandus hic non est, quoniam habet quantitatem imaginariam d . Ergo $ee f - 2ehh \propto 2abb$, vel ponendo pro f et hh , ea quibus aequalia inventa sunt erit

$$2aee + 2e^3 - \frac{2aabb}{e} \propto 2abb$$

$e^4 + ae^3 \propto abbe + aabb$ quod utrumque dividitur per $e + a$ et fit $e^3 \propto abb$ vel $x^3 \propto abb$ nam x erat $\propto e$. Debet itaque AF esse una e medijs proportionalibus inter BA et BC, ut fiat FDE omnium brevissima quae per punctum D ducitur inter lines BF, BE.

ad comparationes aequationum quod attinet, apparet equidem quam eae rationem habeant in aequationibus quae quadratum non excedunt, ut in priori horum

la pièce N°. VIII. Comparez la p. 40 du Tome présent à commencer par les mots: „Determination autem problematis solida est,” etc

Ajoutons qu'en 1657 Huygens posa le même problème à De Sluse dans sa lettre du 27 juillet (p. 41 du T. II). De Sluse ne manqua pas de reconnaître l'identité du problème avec celui de trouver les deux moyennes proportionnelles entre les lignes AB et BC et de le résoudre au moyen de l'artifice indiqué par Héron et que nous avons mentionné dans la note 10, p. 40 du Tome présent. Voir la réponse de De Sluse du 31 juillet 1657 (p. 43 du T. II).

exemplorum. Nam in quacunque aequatione quadrata, si sciam radicem habere duos valores aequales, possum singulos eorum invenire per ejusmodi comparationem; sic posito

$$\begin{aligned}xx - ax + ac &\text{aequale nihilo,} \\ - bx + bc \\ - cx\end{aligned}$$

si constet x valere duas quantitates aequales comparo $a + b + c$ cum $2e$ nempe secundum terminum cum secundo meae aequationis quam formavi $xx - 2cx + ee$. fitque $e \propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ itaque valor uterque radicis x est $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Quod si invenire velim ex qua multiplicatione proposita aequatio fit orta, comparo porro ultimos terminos $ee \propto ac + bc$, seu quoniam e erat inventum $\propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, fiet

$$\begin{aligned}ac + bc &\propto \frac{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc}{4} \\ aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc &\propto 0.\end{aligned}$$

quare ejus radix $a + b - c \propto 0$; $a + b \propto c$ unde e quae erat $\propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ erit nunc $\propto a + b$ vel $\propto c$ nam haec sunt aequalia. itaque orta est aequatio proposita ex multiplicatione $x - a - b \propto 0$ per $x - c \propto 0$, suntque valores duo aequales radicis x , c et $a + b$. Omnes aequationes quadratae productae sunt hoc modo ex multiplicatione radicis in se ipsam multatae quantitatibus sibi aequalibus, ideoque non mirum, quod ubi duae istae quantitates aequales sunt, secundus terminus aequetur $-2ex$ hoc est $-2ax$ nam idem est ac si $x - a$ multiplicatum sit in $x - a$. quod vero $x - e$ ponitur $\propto 0$ adscita litera $e \propto x$, hoc fit ut terminorum ordo cum distinctione habeatur.

Porro in cubicis et quadratoquadraticis alijsque aequationibus, talem formare oportet aequationem, ut totidem dimensiones et consequenter tot valores diversos habeat x quot sunt in illa aequatione cui comparari eam necesse est. Ut in exemplo horum posteriori, primum quidem formo aequationem quadratam $xx - 2ex + ee$, quae duos valores habet eosque aequales; at quoniam hanc quadratoquadraticae conferre nequeo, ducenda est porro in aliam aequationem quadratam, cujus quidem radicis valores iidem supponuntur cum duobus valoribus radicis aequationis primariae quos habebat praeter duos aequales. nam non aliter termini singuli unius aequationis aequari possunt singulis terminis alterius nisi radix illius omnes eosdem habeat valores aequationis hujus. quod autem ibi multiplicavi per $xx + fx + hh$, sciendum est hanc esse quadratam aequationem in qua x habet duos valores licet falsi sint, nempe $-\frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}ff - hh}$ et $-\frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}ff - hh}$. Hi itaque valores x aequales supponuntur duobus istis quos habebat x in primaria aequatione praeter duos inter se aequales. quare ducto $xx - fx + hh \propto 0$

in $xx - 2ex + e^2 \propto 0$ recte aequatio inde producta cum priori secundum singulos terminos confertur, eo quod singuli quatuor valores radices in una singulis in altera aequales supponantur; ex isto autem supposito, omnia consequenter inveniuntur quae requiruntur ut quod⁹⁾ suppositum est verum esse possit, itaque primum inveni-

tur $f \propto 2a + 2e$ et $hh \propto \frac{aabb}{ee}$ deinde e^3 seu $x^3 \propto abb$.

Nihil autem interest quae signa $+$ et $-$ sint in $xx + fx + hh$ quae quantitas ducta est in $xx - 2ex + ee$ supplendi dimensiones gratia. quia postmodum quantitates f et hh rursus eliminantur.

Potuiſſet etiam loco aequationis $xx + fx + hh \propto 0$ aliae sumi ut $xx - fx - hx + fh \propto 0$, orta ex $x - f \propto 0$ per $x - h \propto 0$; item $xx \cdot fx \cdot fh$, et quaelibet praeter has, dummodo praeter x duas alias literas habeant, ductaque in $xx - 2ex + ee$, omnes dimensiones forment quae sunt in aequatione prima. Sed omnium commodissime tumitur $xx \cdot fx \cdot hh$, quod Cartesius praecribit⁹⁾. Sciendum autem est, nihil esse aliud, tangentem quaerere secundum ipsius methodum¹⁰⁾ quam ex certo puncto ducere lineam rectam brevissimam earum quae possunt, lineae curvae occurrentem. Et licet aliquando hoc sit solidum,¹¹⁾ et tangentem tamen ad datum in curva punctum ducere planum sit, utrumque ea ratione simul construi discimus et discernitur simul quodnam è duobus solidum quodve planum sit. Illud modo observandum est, quae quantitas duos diversos valores habere possit, cum problema ita resolvitur ut non brevissimam, sed certae lineae aequalem ducere quaeramus.

[SECONDE PARTIE.]¹²⁾

Methodus autem Fermatij in solidis problematibus plerisque et praecipue ad tan-

⁹⁾ Au lieu cité dans la note 6, Descartes n'emploie que le signe $+$ dans le facteur en question; mais il remarque à propos de ces signes: „Mesme il est a remarquer, touchant la dernière somme, ... $x^4 + fx^3 + ggyx + h^3y + k^4$, que les signes, $+$ & $-$, y peuvent estre supposés tels qu'on veut, sans que la ligne y ” [qu'il s'agit de déterminer en égalant les coefficients des deux équations] „se trouve diverse pour cela, comme vous pourrés aysement voir par experience: car, s'il falloit que ie m'arestasse a demonstrier tous les theoremes dont ie fais quelque mention, ie serois contrainct d'escrire vn volume beaucoup plus gros que ie ne desire”.

¹⁰⁾ On sait que Descartes remplace la recherche de la tangente à un point donné C d'une courbe, dont l'équation est connue, par celle de la normale. Pour trouver cette dernière il cherche sur l'axe des coordonnées un point P situé de telle manière que le cercle, décrit avec le rayon CP du point P comme centre, touche la courbe donnée au point C, ce qui exige que l'équation, qui sert à déterminer les intersections du cercle avec la courbe, possède deux racines égales. Comparez les pages 413—419 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery.

¹¹⁾ Comparez p. e. le § 7, p. 32 et 33 du T. XI.

¹²⁾ L'état du manuscrit fait présumer que la seconde et la troisième partie n'ont été ajoutées à la première qu'après un certain laps de temps; la seconde probablement avant et la troisième,

Sic jam $x + y \propto x$ et subrogetur ubique ejus quantitas, in quantum opus erit, fit aequatio comparanda cum priori.

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2ax^3 + aaxx + 2abbx + aabb \\
 - 2c \quad + bb \quad - 2aac \quad + 2abby \\
 + 4y \quad - 4ac \quad + 2aay \quad - 2aacy \\
 \quad + 6ay \quad + 2bby \\
 \quad - 6cy \quad - 8acy \\
 \hline
 \quad \quad \quad xx + 2xy \quad \quad \quad \propto dd \\
 \text{adaequantur } ^{17)}
 \end{array}$$

Possit alternas per denominatores multiplicationes aequaliumque ablationem fit

$$\begin{array}{r}
 2x^5 + 2ax^4 + 2aacxx - 2aab^2x \propto 0 \\
 - 2c \quad - 2abb \\
 \\
 x^4 + ax^3 + aacx - aabb \propto 0 \\
 - c \quad - abb
 \end{array}$$

Quando c efficit $\propto 0$ hoc est angulus EBF rectus, aequatio dividi potest per $x + a$, fierique $x^3 - abb \propto 0$ sicut antea quoque inventum est. ¹⁸⁾

Quando autem $a \propto b$, dividi potest per $x - a$, ideoque tum $x \propto a$ et tum planum est problema.

[TROISIÈME PARTIE.]

Problematis hujus constructio superius allata ¹⁹⁾ hic demonstranda est, erat autem hujusmodi.

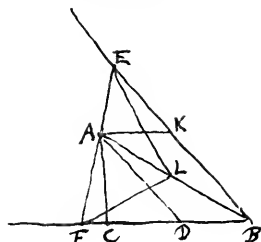
Juncta AB [Fig. 4.] dividatur bifariam in L; politaque regula ad punctum

¹⁷⁾ C'est-à-dire les deux valeurs obtenues pour dd .

¹⁸⁾ Voir la *première partie* à la page 63. Plus tard, Huygens s'est aperçu que la division par $x + a$ se pouvait accomplir également au cas général. Ainsi à côté de la dernière équation biquadratique du texte, il écrivit : „dividi potest per $a + x$ ” et à l'autre côté le résultat de la division, c'est-à-dire : „ $x^3 - cxx + acx - abb \propto 0$ ”

¹⁹⁾ Voir la pièce N^o. VIII. p. 40 du Tome présent, ligne 7 d'en bas, à commencer par les mots : „Etenim dato intra angulum BAC puncto D,” etc.

[Fig. 4.]



A, ea tam diu moveatur donec positionem habeat FE, faciens LE, LF inter se aequales, fietque EF omnium brevissima quae per punctum A intra angulum EBF duci possunt. Idem quoque factum fuit supra per intersectionem hyperboles et circuli, ²⁰⁾ sed utrinque eadem est ratio.

Ducantur AD, AK parallelae EB, BF, et AC perpendicularis in FB, et nomina linearum ferventur quae posita fuere. ²¹⁾ Ergo existentibus FL, LE inter se aequalibus ostendendum est

$$x^4 + ax^3 + aacx - aabb \propto 0 \quad ^{22)} \\ - cx^3 - abbx$$

Quia in triangulo AEB ducta est EL ad mediam basin AB erunt quadrata AE et EB dupla simul quadratorum AL et LE, similiterque in triangulo AFB erunt quadrata AF, FB simul dupla quadratorum AL, LF. Ergo si qu. LF aequale qu. LE, erunt qu. AF, FB simul aequalia qu. AE, EB.

p. 12.2. Elem. ¹⁶⁾

$$q. AF \propto bb + xx - 2cx$$

$$q. DF(xx) \text{ ad } q. AF(bb + xx - 2cx) \text{ ut } q. AK(aa) \text{ ad } q. AE\left(\frac{aabb + aaxx - 2aacx}{xx}\right)$$

$$q. FB \propto aa + xx + 2ax$$

$$q. DF(xx) \text{ ad } q. DA(bb) \text{ ut } q. FB(aa + xx + 2ax) \text{ ad } q. BE\left(\frac{bbaa + 2abbx + bbxx}{xx}\right)$$

$$q. AF + q. FB \quad bb + aa + 2xx + 2ax - 2cx \propto \\ \propto \frac{aaxx + bbxx - 2aacx + 2abbx + 2aabb}{xx} \quad q. AE + q. BE.$$

$$x^4 + ax^3 - cx^3 \propto abbx - aacx + aabb$$

$$x^4 + ax^3 + aacx - aabb \propto 0 \\ - cx^3 - abbx$$

$$\text{div. per } x + a \quad x^3 - cx^2 + acx - abb \propto 0 \quad ^{23)}$$

²⁰⁾ Voir la page 41 du Tome présent à commencer par les mots; „Aliter quoque iisdem positis,” etc.

²¹⁾ Voir la *seconde partie* à la page 66.

²²⁾ C'est l'équation finale de la *seconde partie*.

²³⁾ Cette dernière ligne a été ajoutée après coup. Comparez la note 18.

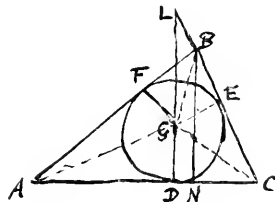
XV.¹⁾

1653.

22 Jan. 1653.

Inventio regulæ qua utimur ad inveniendam ex lateribus aream trianguli.

Sit triangulum ABC cujus data sint latera, et oporteat aream invenire. Ponatur intra triangulum circulus descriptus GDFE, et ductæ ex centro G ad latera perpendiculares GD, GE, GF quas constat esse æquales, ideoque cum triangulum ABC sit æquale tribus triangulis AGC, CGB, BGA, erit idem æquale triangulo cujus basis æqualis tribus AB, BC, CA et altitudo GD. Igitur quaerenda est GD.



et proinde $AF \propto a - b + y$.

$$AF \propto a - b + y \propto c - y \text{ AD.}$$

$$DC \propto y \propto \frac{c + b - a}{2}.$$

Sit nunc $GD \propto x$ et ducatur BN perpend. ad AC et producantur CB, DG donec occurrant sibi mutuo in L. Per 13. lib. 1.²⁾ Elem. est $CN \propto \frac{cc + bb - aa}{2c}$.

hæc vocetur e : et propter \angle^{in} similia erit

¹⁾ La pièce occupe les pages 235 et 236 du manuscrit N°. 12. Elle contient une déduction de la formule de Héron.

²⁾ Lisez „per 13. lib. 2.” et consultez la note 18. p. 30 du Tome présent.

q. CN (ee) ad q. NB ($bb - ee$) ut q. CD (yy) ad q. DL $\frac{bbyy - eeyy}{ee}$

item

CN (e) ad CB (b) ut EG (x) ad $\frac{bx}{e}$ GL $\left\{ \begin{array}{l} a[ddc] \\ x \text{ GD} \end{array} \right.$

,

$\frac{bx + ex}{e}$ DL

q. DL $\frac{bbxx + 2bexx + eexx}{ee} \propto \frac{bbyy - eeyy}{ee}$ qu. DL

$xx \propto \frac{bbyy - eeyy}{bb + 2be + ee} \propto \frac{byy - eey}{b + e}$

$\frac{(b+c)}{2c} \quad \frac{(b-e)}{2c} \quad \frac{(yy)}{+}$
 $bb + 2bc + cc - aa$ ad $aa - bb + 2bc - cc$ ut $bb + 2bc + cc - 2ac - 2ab + aa$ ad xx

denominator primi et secundi termini quia idem est aufertur; deinde primus et tertius terminus dividi possunt per $b + c - a$. Et fit

$b + c + a$ ad $\frac{b + c - a}{+}$ ut $aa - bb + 2bc - cc$ ad xx .³⁾

Quia vero GD, x , ducta in $\frac{a + b + c}{2}$ dimidium summae laterum, producit aream trianguli ABC, apparet eandem quoque provenire si xx ducatur in quadratum ex $\frac{a + b + c}{2}$, et ex producto radix extrahatur. Sed xx est illud quod oritur ex producto terminorum tertij et secundi, ultimo positorum, diviso per primum qui est $a + b + c$. Ergo quoniam hoc multiplicari rursus deberet per qu. ex $\frac{a + b + c}{2}$ apparet tantum opus esse ut secundus terminus in tertium ducatur et hoc productum rursus in $\frac{a + b + c}{+}$, atque ex ultimo producto radix eliciatur: Atque hanc fore aream trianguli quaefiramus.

Oportet igitur multiplicare $aa - bb + 2bc - cc$ per $\frac{b + c - a}{+}$ et horum pro-

³⁾ Huygens annota en marge: „Theorema ad inveniendum femidiametrum circuli in triangulo.”

ductum per $a + b + c$. Hoc autem idem est ac si haec tria multiplicentur, nempe
 $aa - bb + 2bc - cc$ et $\frac{b+c-a}{2}$ et $\frac{a+b+c}{2}$. Sed $\frac{aa - bb + 2bc - cc}{4}$ oritur
 ex multiplicatione $\frac{a-b+c}{2}$ in $\frac{a-c+b}{2}$. Itaque haec quatuor multiplicanda
 sunt, videlicet, $\frac{a-b+c}{2}$ et $\frac{a-c+b}{2}$ et $\frac{b+c-a}{2}$ et $\frac{a+b+c}{2}$, et producti
 radix erit area trianguli ABC. Tres autem priores termini inveniuntur si ex dimidio
 summae laterum singula latera auferantur, estque quartus terminus ipsa medietas
 summae laterum.

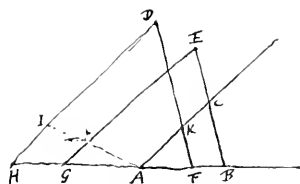
Igitur hinc regula manifesta fit quae ad aream trianguli inveniendam praecipit,
 ut ex dimidia summa laterum singula latera auferantur; et haec tria residua in se
 mutuo ducantur et in dimidium summae laterum, atque ut ex producto radix
 eliciatur.

XVI.¹⁾

1653.

19 Aug. 1653.

[Fig. 1.]



Dato positione angulo CAB et punctis extra ipsum D et E, propositum sit abscindere duabus inde ductis parallelis spatium KCBF aequale dato quadrato S.

Producatur BA et ducantur DH, EG parallelæ CA, vocetur AG, *a*, GE, *b*, AH, *c*, HD, *d*, et quaeratur

AF $\propto x$ factò autem triangulo HIA $\propto \square S$ vocetur HI, *q*.

$$FH (x + c) \text{ ad } HD (d) \text{ ut } FA (x) \text{ ad } \frac{dx}{x + c} \frac{AK}{x AF} \left\{ m[ult.] \right.$$

$$\frac{dxx}{x + c} \square KAF$$

$$DH (d) \text{ ad } HF (x + c) \text{ ut } EG b \text{ ad } \frac{bx + bc}{d} - GB \left\{ f[ubt.] \right.$$

$$\frac{bx + bc}{a} - a \quad AB$$

$$\text{sit } b \text{ ad } a \text{ ut } d \text{ ad } c \text{ ergo } \frac{cb}{d} \propto a \text{ ergo } \frac{bx + bc - cb}{d} \quad AB$$

¹⁾ La pièce est empruntée aux pages 237—240 du manuscrit N^o. 12. Elle contient la solution d'un problème plan, menant à une équation quadratique. Dans l'analyse, par laquelle Huygens débute, il se sert d'expressions, comme dxx et $bb (xx + 2rx + rr)$ de trois ou quatre dimensions. Puisque de telles expressions ne peuvent être tolérées dans les démonstrations à la mode des anciens, il montre ensuite de quelle manière on peut réussir à les éviter. Enfin il prépare, à la façon indiquée dans la Pièce N^o. V (p. 25 du Tome présent), une „Compositio” et une „Demonstratio”, capable d'être rédigée facilement en n'employant d'autres notions que les conceptions purement géométriques, admises par les anciens.

$$\begin{array}{l}
\text{fit } c - e \propto r \text{ ergo } \frac{bx + br}{d} \text{ AB} \left. \vphantom{\frac{bx + br}{d}} \right\} m[\text{ult.}] \\
\text{FH } (x + c) \text{ ad HD } (d) \text{ ut AB } \frac{bx + br}{d} \text{ ad } \frac{bx + br}{x + c} \text{ AC} \\
\frac{bb \text{ in } (xx + 2rx + rr)}{dx + dc} \square \text{ CAB}^2) \\
\text{sit } \frac{bb}{d} \propto l \frac{l \text{ in } (xx + 2rx + rr)}{x + c} \square \text{ CAB} \left. \vphantom{\frac{l \text{ in } (xx + 2rx + rr)}{x + c}} \right\} f[\text{ult.}] \\
\frac{dxx}{x + c} \square \text{ KAF} \\
\hline
eq \square \text{ IIA} \propto 2 \square \text{ CKFB } l \text{ in } \frac{(xx + 2rx + rr) - dxx}{x + c} \\
\frac{dxx}{x + c} \text{ est } \frac{dxx}{x + c} \text{ ergo } eq \propto l \text{ in } \left(\frac{xx + 2rx + rr - \frac{dxx}{l}}{x + c} \right) \\
\text{ergo } x + c \text{ ad } l \text{ ut } xx + 2rx + rr - \frac{dxx}{l} \text{ ad } eq.
\end{array}$$

Id quod hic fecimus semper agendum est ut aequatio fit ejusmodi quae in proportionem resolvī possit, idque sine solidorum mentione.

Proportio autem semel ordinata retinenda est, aut si nonnunquam ad aequalitatem redigatur, rursus repetenda, donec ad simplicissimos terminos deveniatur, ex quibus x innoteat.

Verum quia demonstrationis inveniendae gratia hujusmodi analysis instituta est, oportet ut operatio omnis quae aequationem praecessit argumentationis formam accipiat. Etenim postquam repetendo analyticeos vestigia demonstratum erit quod

$$x + c \text{ ad } l \text{ ut } xx + 2rx + rr - \frac{dxx}{l} \text{ ad } eq,$$

oportebit ex ista quae aequationem praecessit argumentatione ostendere quod

$$x + c \text{ ad } l \text{ ut } xx + 2rx + rr - \frac{dxx}{l} \text{ ad } \square \text{ CKFB } 2$$

Itaque resolutione continua opus est hujusmodi:

Factum ponatur, et sint constructa quae superius diximus. Porro autem ut b ad a

ita fit d ad e , ergo d ad b ut e ad a

sed d ad b ut $x + c$ ad GB

ergo $x + c$ ad GB ut e ad a

et $x + c - e$ ad e ut AB ad a

²⁾ Ici et dans la suite les aires des parallélogrammes indiqués et du trapèze CKFB ne sont pas égales mais proportionnelles aux expressions algébriques qui les accompagnent.

et $x + c = e$ ad AB ut e ad a

ergo $x + c = e$ ad AB ut d ad b

fed AB ad AC ut $x + c$ ad d

per pr. pert.³⁾ ergo $x + c = e$ ad AC ut $x + c$ ad b

$c = e \propto r$ $x + r$ ad AC ut $x + c$ ad b

fed $x + r$ ad AB ut d ad b

ergo ratio comp.⁴ ex $x + r$ ad AC et $x + r$ ad AB, hoc est Q. $x + r$ ⁴⁾ ad \square CAB eadem est compositae ex $x + c$ ad b et d ad b . Sit autem ut d ad b ita b ad l ergo Q. $x + r$ ad \square CAB ut $x + c$ ad l . (nam ratio composita ex $x + c$ ad b et b ad l eadem est quae $x + c$ ad l .)

Itaque $x + c$ ad l ut Q. $x + r$ ad \square CAB α ⁵⁾.

Fiat jam ut l ad d ita xx ad $\frac{dxx}{l}$ designandum $\frac{dxx}{l}$.⁶⁾ Reductio \square KAF;
est autem d ad $x + c$ ut \square KAF ad xx .

per perturb.³⁾ ergo $x + c$ ad l ut $\frac{dxx}{l}$ ad \square KAF

α . 7) ergo $x + c$ ad l ut $Q\overline{x+r} = \frac{dxx}{l}$ ad \square CAB \square KAF seu \square IIIA(qc)
Æquatio superius exhibita. ⁸⁾

Sit l ad q ut c ad p ergo $lp \propto qc$

ergo $x + c$ ad l ut Q. $x + r = \frac{dxx}{l}$ ad lp

sed ut $x + c$ ad l ita $px + pc$ ad lp

ergo $xx + 2rx + rr = \frac{dxx}{l} \propto px + pc$

$xx + 2rx = px = \frac{dxx}{l} \propto pc = rr$ Sit $pc = rr \propto ss$

$xx + 2rx = px = \frac{dxx}{l} \propto ss$

³⁾ Consultez sur l'opération ; „ex aequali in proportione perturbata”, la note 22, p. 304 du T. XI.

⁴⁾ Lisez : $(x + r)^2$.

⁵⁾ L' α est un signe de renvoi, voir la note 7.

⁶⁾ C'est-à-dire en introduisant, pour le besoin de la rédaction à la mode des anciens, une ligne inconnue égale à $\frac{dxx}{l}$. En effet, dans la Fig. 2 cette ligne est représentée par AN; voir la note 11.

⁷⁾ Le signe de renvoi α veut dire que la proportion qui va suivre, se déduit de celle qui précède immédiatement, combinée avec celle marquée, quelques lignes plus haut, avec le signe α .

⁸⁾ Voir les proportions de la page précédente qui commencent avec „ $x + c$ ad l .”

$$\text{ergo } x \text{ ad } s \text{ ut } s \text{ ad } x + 2r - p = \frac{dx}{l}$$

$$\text{sed ut } s \text{ ad } x + 2r - p = \frac{dx}{l} \text{ ita } ls \text{ ad } lx = dx + 2rl - pl$$

$$\text{ergo } x \text{ ad } s \text{ ut } ls \text{ ad } lx = dx + 2rl - pl$$

$$\text{sit } l = d \text{ ad } l \text{ ut } 2r - p \text{ ad } m \text{ ergo } lm = dm \propto 2rl - pl$$

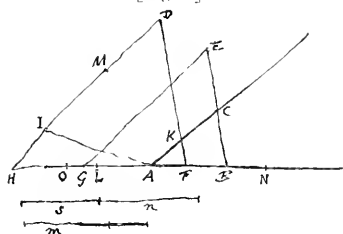
$$\text{ergo } x \text{ ad } s \text{ ut } ls \text{ ad } lx = dx + lm = dm$$

$$\text{sit } l = d \text{ ad } l \text{ ut } s \text{ ad } n \text{ ergo } ln = dn \propto ls$$

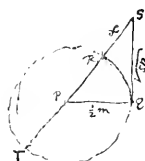
$$\text{ergo } x \text{ ad } s \text{ ut } ln = dn \text{ ad } lx = dx + lm = dm$$

ergo $x \text{ ad } s \text{ ut } n \text{ ad } x + m \text{ et } nx + mx \propto sn$ quod componitur secundum regulam acquisitionum quadraticarum ⁹⁾

[Fig. 2.]



[Fig. 3.]

e. HL ¹⁰⁾l. HM ¹⁰⁾ $\frac{dx}{l} \cdot AN$ ¹¹⁾p. HO ¹²⁾r. LA ¹³⁾

Hinc demonstratio facile conferibetur per regreſſum, cujus hoc fit initium; ¹⁴⁾

Rect. TSR [Fig. 3] aequale est quadrato SQ, hoc est \square^{sm} ,

$$\text{ergo } RS, x \text{ ad } s \text{ ut } n \text{ ad } x + m, ST.$$

$$\text{Sed ut } n \text{ ad } (x + m) \text{ ita } nl = nd \text{ ad } xl = xd + lm = dm$$

$$\text{ergo } x \text{ ad } s \text{ ut } nl = nd \text{ ad } xl = xd + lm = dm$$

&c.

⁹⁾ Voir la figure 3.

¹⁰⁾ On a $e = ad$; $b = AG \propto HD$; GE ; $l = b^2$; $d = GE^2$; HD . Ces constructions ne sont pas indiquées dans la figure.

¹¹⁾ Cette ligne AN ne peut pas être construite pour le moment. Elle n'est introduite que pour le besoin de la rédaction. Voir la note 6.

¹²⁾ On a $p = qc$; $l = HL \propto HA$; HM . Cette ligne se construit facilement en tirant IO parallèle à MA .

¹³⁾ En effet $r = e - c = HA - HL$. Ajoutons que les lignes s, m, n , qu'on trouve représentées en bas de la figure 2, ont été définies par les égalités $ss = pc - rr$; $m = (2r - p)l$; $n = ls$; $(l - d)$.

¹⁴⁾ Comparez la note 5, p. 24, dernier alinéa.

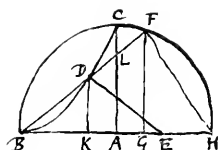
XVII.¹⁾

1653.

1^a Sept. 1653.

Inventio tangentis in Cissoïde Dioclis.

[Fig. 1.]



Proprietas Cissoïdis hæc est ut ducta linea BF quæ perpendicularẽ AC ex centro A eductam fecerit in L et Cissoïdem in D, sint æquales DL, LF.²⁾

Sit AB $\propto a$, BK $\propto x$, BE $\propto y$, ED $\propto s$

BG $(2a - x)$ ad GF $\left(\sqrt{2ax - xv} \right)$ ut BK (x)

ad $x \mid \frac{2ax - xv}{2a - x}$ KD

ergo $\frac{x^3}{2a - x}$ qu. KD $\left\{ \begin{array}{l} a[ddc] \\ \end{array} \right.$

$\frac{yy - 2yx + xv}{2a - x}$ qu. KE

$\frac{x^3}{2a - x} + yy - 2yx + xv \propto ss^3$) q. DE

¹⁾ La pièce se trouve à la page 241 du manuscrit N^o. 12. Elle contient la détermination de la tangente à la cissoïde d'après la méthode de Descartes, décrite dans la note 10, p. 65 du Tome présent.

²⁾ Cette propriété est une conséquence presque immédiate de la définition de la cissoïde, qu'on trouve dans les Commentaires d'Eutocius sur l'ouvrage „De sphaera et cylindro” d'Archimède. Voir T. III, p. 80—83 de l'édition de Heiberg, citée p. 50 du T. XI; p. 17—18 de l'édition de Bâle, citée p. 274 du même Tome.

³⁾ Dans le texte, qui va suivre, la méthode de Descartes est employée jusqu'au bout. C'est-à-dire l'équation en x en tête de la page suivante, qu'on écrirait maintenant :

$$x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{s^2 + 4av}{2(a + v)}x + \frac{a(y^2 - s^2)}{a + v} = 0$$

est identifiée terme pour terme avec l'équation $x^2 - 2cx + e^2 = 0$.

Or, dans un petit manuscrit qui a appartenu à son frère Philippe, décédé en mai 1657,

$$\begin{array}{r} xx - yvx + 2ayy - 2ass \\ + ssx \\ - 4ayx \\ \hline 2a + 2y \end{array} \propto 0$$

$$\text{Sit } x \propto e \quad xx - 2ex + ee \propto 0$$

$$\text{Comparatio ultimi term.}^4) \frac{2ayy - 2ass}{2a + 2y} \propto ee$$

$$a[\text{dde}]^5) \left\{ \begin{array}{l} yy - ee - \frac{yee}{a} \propto ss \\ - yy - 4ay \end{array} \right.$$

Huygens a fait des notices et des calculs qui datent de 1657. On y rencontre à la page 31 une autre déduction de la relation qui doit exister entre x et v , basée sur la condition que ss doit être un minimum pour v constant, x variable.

De cette déduction il résulte qu'alors Huygens avait déjà apporté une nouvelle simplification à la méthode, employée p. 66—67 du Tome présent, pour trouver la valeur minimale ou maximale d'une fraction $\varphi(x) : \psi(x)$; cette simplification consiste, en notation moderne, à poser :

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y\varphi'(x)}{y\psi'(x)}$$

où y représente un petit accroissement de la variable x .

Voici, en effet, cette déduction :

$$\begin{aligned} & \propto \frac{x^3}{2a - x} + yy - 2yx + xx \propto ss \\ & \frac{2ayy - xyy - 4ayx + 2yx + 2axx}{2a - x} \propto ss \propto \frac{-yy - 4ay + 4xy + 4ax}{-y} \\ & - 2ayy + xyy + 4ayx - 2yx - 2axx \propto - 2ayy - 8ay + 8ayx + 8axx + \\ & \quad + yvx + 4ayx - 4yx - 4axx \\ & 8ay - 8ayx + 2axx \propto 8ax - 2yx \\ & 4ay - 4ayx + yx \propto 4ax - axx \\ & y \propto \frac{4ax - axx}{4a - 4x + xx} \end{aligned}$$

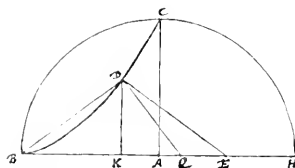
⁴⁾ Comparez la note 6, p. 61 du Tome présent.

⁵⁾ Le second terme de l'équation originale étant $\left(\frac{-yy + ss - 4ay}{2a + 2y} \right)x$, Huygens additionne $-yy - 4ay$ à la valeur de ss calculée d'après la formule précédente, pour égaliser ensuite le coefficient obtenu à $-2e$.

$$\text{Comp. secund. term.} = \frac{ce - \frac{vce}{a} - 4av}{2a + 2v} = \infty - 2e$$

$$v \propto \frac{4ade - aee}{4aa - 4ae + ee}$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Jungatur BD [Fig. 2] et sint perpendiculares DK et DQ super AB et BD, eritque BQ

$$\frac{4ade - 2aee}{4aa - 4ae + ee}.$$

Porro ut KH ad HA ita sit

$$KQ \text{ ad } QE, \text{ eritque } QE = \frac{aee}{4aa - 4ae + ee} \text{ quae}$$

addita ad BQ facit BE $\propto \frac{4ade - aee}{4aa - 4ae + ee}$ ut oportebat.

$$\text{NB. } BQ = \frac{4ade - 2aee}{4aa - 4ae + ee} \text{ est idem q[uo]d } \frac{2a^2}{2a - e}. \quad 4aa - 4ae + ee \text{ est qu. KH.}$$

Trianguli BFH,⁶⁾ BDQ⁸⁾ sunt fimiles. Unde proportionales GB, BH: KB, BQ. Item HK, KB, KQ.

⁶⁾ On a $BQ = BD^2 : BK = \left(e^2 + \frac{e^2}{2a - e} \right) : e = \frac{2ae}{2a - e} = \frac{4ade - 2aee}{4aa - 4ae + ee}$.

⁷⁾ Voir la Fig. 1.

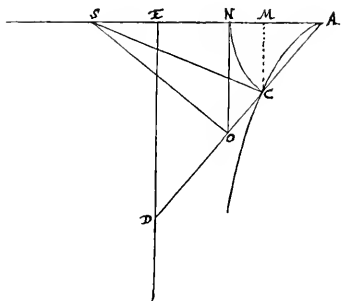
⁸⁾ Voir la Fig. 2.

$$\begin{aligned} \text{q.SC } & \nu\nu - 2p\nu + \frac{aapp}{aa - 2ap + pp} \propto \nu\nu - 2\nu p - 2\nu y + \\ & + \frac{aapp + 2aapy}{aa - 2ap - 2ay + pp + 2py} \text{ q.SC}^3) \end{aligned}$$

$$\text{quadrato quadr. } \frac{a^4p - a^3pp}{a^4 - 4a^3p + 6aapp - 4ap^3 + p^4} \propto \nu \quad \text{fit EM } a - p \propto n$$

$$\frac{a^3p}{n^3} \propto \nu$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Ducatur ACD, et ponatur AN \propto AC, et fit NO parall. ED, et OS perpend. ad AO. Juncta SC occurret Conchoïdi ad angulos rectos.

NB. AC est $\frac{ap}{n}$ ergo $\nu \propto \frac{aa}{nn}$ in AC, proportionales autem sunt AM, AC (cui aequ. AN) AO. Ideoque AM ad AO ut qu. AM ad qu. AC, five ut qu. EM ad qu. CD, hoc est ut m ad a . Ergo ut AM ad

AO ita AC ad ν . Quare permutando ut AM ad AC h. e. ut NA ad AO ita AO ad ν , hoc est AS.

³⁾ La valeur de SC², pour AM = p , étant trouvée, Huygens écrit à côté celle qu'on obtient pour AM = $p + y$ et égale les deux valeurs, ce qui permet de calculer la valeur cherchée de $\nu = AS$.

Ajoutons que sur une feuille séparée la méthode de Descartes est poursuivie jusqu'à la fin, c'est-à-dire, en se servant de l'artifice exposé dans la note 6, p. 61 du Tome présent. Sur cette feuille, écrite d'une autre main, Huygens a annoté „Berkelij.” Sans doute il s'agit de Abraham van Berckel, mentionné dans la note 2, p. 242 du T. I, qui, d'après la lettre N^o. 163 de la même page, s'intéressait à des problèmes mathématiques.

XX.¹⁾

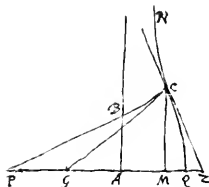
1653.

25. Sept. 1653.

In Conchoide Nicomedis invenire flexionis punctum.

Est Conchoides QCN. polus G, Asymptotus AB. Et ponatur inventum jam esse flexus punctum quod sit C. et ducatur tangens CZ. Igitur quoniam pars conchoidis CQ est cava versus G, necesse est tangentes omnes ad puncta inter C et Q, secare rectam GZ inter Q et Z item quia pars conchoidis reliqua CN convexa est versus G, omnes quoque tangentes ad puncta partis CN quantumlibet productae, rectam GZ secare necesse est inter A et Z. Igitur tangens CZ est ejusmodi, quae abscindat AZ aut GZ omnium maximam quae a tangente abscindi possunt. Sit GA, *b*, AQ, *c*, AM, *y*. Ergo CM erit ex proprietate Conchoides

[Fig. 1.]



$$CM \propto \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy - 2by^3 - y^4 + ccy} \\ yy$$

Cum CP tangenti CZ est perp. est

PM $\left(y^4 + \frac{by^3 + bccy + bbcc}{y^3} \right)^2$ ad CM ut haec eadem CM

$$\text{ad MZ } \frac{bbccy + 2bccy - bby^3 - 2by^4 - y^5 + ccy}{bbcc + bccy + by^3 + y^4}$$

¹⁾ La pièce est empruntée aux pages 243–243b du manuscrit N^o. 12. La construction qu'elle amène se retrouve avec des modifications de rédaction et des additions dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” de 1654 comme „Probl. VIII”, et de même dans une lettre à Van Schooten du 23 octobre 1653, reproduite avec sa minute aux pages 243–246 du T. I.

²⁾ Huygens ajoute en marge à ce propos „Vide infra ubi tangens conchoidis à Schote-

adde MA y sub eodem denomin.

$$\text{AZ} \quad \frac{2bbccy + 3bccyy - bby^3 - by^4 + ccy^3}{bbcc + bccy + by^3 + by^4}$$

Potest numerator et denominator dividi per $b + y$

$$\text{AZ} \quad \frac{2bccy + ccy^2 - by^3}{bcc + y^3} \propto \frac{2bccy + 2bccz + ccy^2 - 2ccyz - by^3 - 3by^2z}{bcc + y^3 + yz} \quad \text{AZ}$$

Scriptis nempe scribendis secundum regulam de maximis et min. ponendo $\text{AM} \propto y + z$.³⁾

$$6bccy^2z + 3ccy^4z - 3by^5z \propto 2bbcz^2 + 2bccy^3z + 2bc^2yz + 2ccy^4z - 3bbccyyz - 3by^5z$$

$$y^4 + 4by^3 + 3bbyy - 2bccy - 2bbcc \propto 0 \quad \text{div. per } b + y$$

$y^3 + 3byy - 2bcc \propto 0$. Auferatur secund. term. pon.⁴⁾ $q \propto y + b$ ⁴⁾
five GM; hoc est $q - b \propto y$ fit

$$q^3 - 3bbq + 2b^3 - 2bcc \propto 0$$

$$q^3 \propto 3bbq + 2bcc - 2b^3$$

fumtaque b pro unit.

$$q^3 \propto 3bq + \frac{2cc}{b} - 2b. \quad q \text{ est GM.}$$

Si $b \propto c$ erit $q^3 \propto 3b^2q$. $qq \propto 3bb$. Planum.

Item si $cc \propto 2bb$ erit $q \propto 2b$.

CONSTRUCTIO. 5)

Sicut GA ad AQ [Fig. 2 et 3] ita fit AQ ad AE et ponatur ipsi GE aequalis GF. Porro fit GR parall. AB et aequalis duplae AG, et describatur parabola ver-

nio inventa est". Consultez la page 18 du T. XI, où la valeur de AP, trouvée par van Schooten, est indiquée.

³⁾ Il s'agit de la méthode exposée au début de la seconde partie du N°. XIV, p. 65—66 du Tome présent.

⁴⁾ Comparez au Livre III de la „Géométrie” de Descartes l'article: „Comment on peut oster le second terme d'une Equation”, p. 449—450 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery.

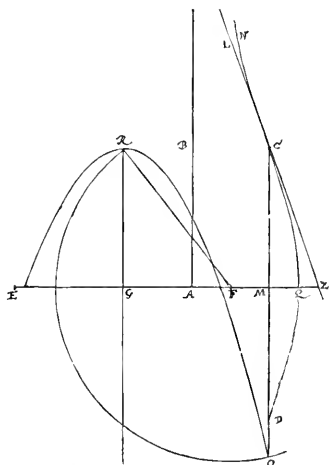
⁵⁾ L'équation cubique en q une fois trouvée, Huygens, pour arriver à la construction qui va suivre, n'avait qu'à se servir de la règle donnée par Descartes au Livre III de sa „Géométrie” (p. 464—467 de l'édition d'Adam et Tannery) pour construire à l'aide d'un cercle et d'une parabole les racines des équations cubiques et biquadratiques; en s'appliquant toutefois à réduire autant que possible le nombre des lignes à tirer. A cet effet Huygens fait correspondre les points G et R de ses figures avec les points D et A de celle de Descartes. Ensuite il con-

tice R, latere recto aequali GA quae sit RO. Centro vero F radio FR circumferentia describatur parabolam secans in O et ducatur OC parallela AB, donec Conchoïdi occurrat in C. Eritque C punctum inflexionis quaesitum.

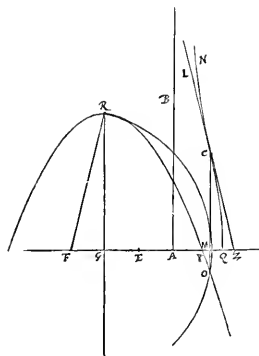
Estque notatum dignum quod (si) ad punctum C tangens (ducatur ZCL, illa simul quoque secabit conchoïdem in puncto C).⁶⁾

Haec est Constructio universalis. At quando AQ minor est quam AG per trisectionem anguli semper absolvi potest. Item cum AQ major quidem est quam AG sed qu. AQ non majus duplo qu.° AG. ⁷⁾

[Fig. 2.]



[Fig. 3.]



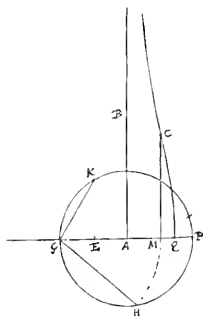
struit le point E, correspondant au point E de Descartes qui est, chez Descartes, le centre du cercle qui va couper la parabole ayant R pour sommet et pour paramètre l'unité $b = GA$; mais avant de tirer le cercle Huygens transporte son centre au point F situé symétriquement à l'autre côté de l'axe RG. De cette façon la droite OM, qui détermine la racine GM de l'équation cubique, peut servir en même temps à découper sur la conchoïde le point d'inflexion cherché. Remarquons encore que Huygens ne semble pas avoir tâché d'interpréter la présence, dans le cas de la Fig. 3 d'un second et d'un troisième point d'intersection du cercle et de la parabole dont l'un est situé entre R et O et l'autre à gauche de la droite RG. Évidemment le second point d'intersection correspond aux points d'inflexion de la seconde branche de la conchoïde et le troisième à des points d'inflexion imaginaires.

⁶⁾ Les mots entre parenthèses ont été biffés depuis et remplacés par „duci nequit”, ce qui témoigne d'une autre conception de la notion de tangente.

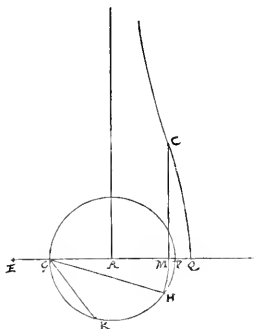
⁷⁾ Les constructions qui vont suivre sont des applications directes des règles données par Descartes au Livre III de sa Géométrie (p. 472—474 de l'édition d'Adam et Tannery) et ces règles mêmes conduisent à la distinction des deux cas.

Si igitur AQ minor fuerit quam AG haec erit Contruētiō quae sequit. Centro A, radio AG (Fig. 4) circulus describatur KPG, inque eo accommodetur GK

[Fig. 4.]



[Fig. 5.]



aequalis duplae GE inventae ut prius, et rectae GH quae subtendit $\frac{1}{3}$ arcus KPG aequalis sumatur GM, et ducatur MC parallela AB. Haec Conchoidem fecabit in flexus puncto.

Cum vero AQ major est quam AG, at qu. AQ non majus duplo quadrato AG, caeteris ad eundem modum compositis, haec tantum differentia erit, quod arcum KP in tres

partes aequales fecare oportet, quarum una fit PH, et subtensae GH aequalem sumere GM.

(Potest autem haec angulorum trisectio fieri ope Conchoīdis ipsius quae propofita est, methodo Nicomedis quam videri est apud Pappum lib. 4 prop. 32.⁸⁾ nam quod ille per Hīperbolem illic efficit,⁹⁾ idem apparet et per Conchoidem fieri posse).¹⁰⁾

⁸⁾ Voir les pages 62 recto et verso de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 de notre T. II. (Hultsch, T. I, p. 274—277). Il s'agit de la construction bien connue par laquelle on obtient la trisection de l'angle ABC en tirant la droite BDE de manière qu'on ait $DE = 2 BA$.

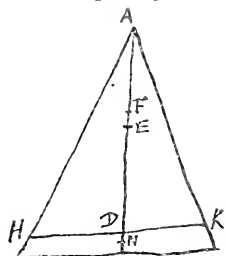
⁹⁾ Dans la proposition précédente sur laquelle on peut consulter la note 9, p. 228 du T. XI.

¹⁰⁾ Cette remarque, que nous avons mise entre parenthèses, a été biffée depuis. Elle se retrouve dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (p. 246 du T. I); mais elle manque dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” de 1654. Dans l'intervalle Huygens doit donc s'être aperçu que le problème de la trisection d'un angle donné à l'aide d'une conchoïde, *donnée d'avance*, est d'une autre nature que celui d'obtenir cette trisection par une conchoïde dont le choix est adapté à l'angle donné. Le premier problème est exécutable, du moins sous de certaines conditions, comme cela ressort indirectement d'une pièce de 1659 que nous donnerons comme Appendice IV aux „Illustrium quorundam problematum constructiones” (voir la note 4 de cet Appendice) mais nous n'avons aucune preuve que Huygens s'est occupé de ce problème.

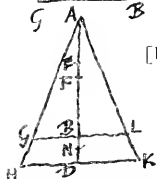
1653.

25 Nov. 1653.

[Fig. 1.]



[Fig. 2.]



Centra gravitatis invenire secundum methodum Fr. Schotenij quae pertinet ad plana vel solida ejus naturae, ut in segmento abscisso sectione basi parallela, centrum grav. in eandem rationem dividat diametrum segmenti, atque in tota magnitudine diametrum totam.

Sit AB diam. trianguli GAL $\propto a$ et E ponatur c. gr. item N centr. gr. GHKL. Sitque AE $\propto x$; BD $\propto y$.

BA (a) ad DB (y) ut AE (x) ad EF ($\frac{xy}{a}$) ergo F c. gr. triang. HAK.

ut $\triangle GHKL$ ($2ay - \frac{1}{2}xy$) ad $\triangle HAK$ ($aa - \frac{1}{2}$) $- 2ay + \frac{1}{2}xy$ ita EF ($\frac{xy}{a}$) ad EN \propto EB ($a - x$)

$2aay - 2axy \propto axy$; haec tantum scribere opus quia cetera delenda forent.

¹⁾ Dans la pièce qui suit et que nous avons empruntée aux pages 249—251 du manuscrit N^o. 12, Huygens détermine le centre de gravité du triangle à l'aide d'une méthode qui lui fut communiquée par van Schooten et qui lui semble avoir frappé comme ingénieuse. Plus tard, en 1657, van Schooten publia cette méthode dans son „Exercitationum mathematicarum Liber V. Continens Sectiones triginta miscellaneas.” p. 458—459 (voir l'ouvrage cité dans la note 3, p. 184 du T. I). Il l'y applique à la parabole en supposant connu déjà le centre de gravité du triangle.

Ajoutons que, dans sa lettre du 10 décembre 1653 à van Schooten (p. 254—256 du T. I.), Huygens revient sur la même méthode pour en donner une autre application.

²⁾ Après coup Huygens remplaça ces moins par le signe \propto qu'il emploie pour indiquer qu'on doit choisir $+$ ou $-$ d'après les circonstances. En même temps il a ajouté la Fig. 2 qui se rapporte au cas où l'on prend le signe $+$.

D'ailleurs les expressions $2ay \propto xy$ et $aa \propto 2ay + \frac{1}{2}xy$ n'indiquent pas les aires des figures GHKL et HAK mais elles leur sont proportionnelles.

³⁾ Cette proportion se déduit du théorème d'Archimède qui sera cité plus bas.

$$2a - 2x \propto x$$

$$2a \propto 3x$$

$$\frac{2}{3}a \propto x \text{ AE ut oportebat.}$$

Ratio methodi *) est haec. Quoties enim E non est ipsum gravitatis centrum possibile est tam exiguum abscindere [Fig. 1] vel adjungere [Fig. 2] frustum GIKL, ut divisa DA in F similiter ac BA in E, faciendoque ut FE ad EN eandem habeat rationem quam frustum GHKL ad \triangle HAK, cadat N non inter D et B ubi debebat fecundum 8.^m Aequipond.^m Archim. 2.^{di} 5) (fuisset enim ex constr. N centrum gr. GIKL) sed extra eam, et quidem ab E ultra B, cum E à vertice A magis remotum erit quam verum grav. centrum: et tunc abscindenda est portio GIKL [Fig. 1]. Sed ab E citra B cum propius vertici A sumetur centrum E quam verum grav. centrum: et tunc adjungenda est portio GIKL [Fig. 2.].

Quin et ea ratione detrahi vel addi potest GHKL ut constructis ijs quae distae funt, incidat N in B. quod cum fiet, inde demonstratio facile deducetur quae deducat ad absurdum. Nam cum N incidet in B nequaquam poterit esse centr. gr. HGKL.

Ut igitur demonstratio habeatur, quaerendum est posito E, quantum adjungendum vel auferendum sit frustum GIKL, ut constructis quae supra cadat N in B. Idque eo qui sequitur modo.

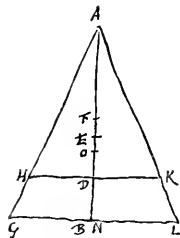
Sit AD $\propto q$. quae quaeritur [Fig. 3.].

$$\text{Et erat BA} \propto a, \text{AE} \propto x. \text{ Ergo } \frac{qx}{a} \propto \text{AF}$$

$$\triangle \text{ GAL } (aa) \text{ ad } \triangle \text{ HAK } (qq) \text{ ut NF} \propto \text{BF} \left(a - \frac{qx}{a} \right) \text{ ad}$$

[Fig. 3.]

$$\text{NE} \propto \text{BE } (a - x) \text{ per 8.2. Aeq. 5)}$$



$$aa - qq \text{ ad } qq \text{ ut } x - \frac{qx}{a} \text{ ad } a - x.$$

$$aa - qq \text{ ad } qq \text{ ut } ax - qx \text{ ad } aa - ax$$

$$a + q \text{ ad } x \text{ ut } qq \text{ ad } aa - ax$$

$$aa + aq \text{ ad } ax \text{ ut } qq \text{ ad } aa - ax$$

$$aa + aq \text{ ad } qq \text{ ut } a \text{ ad } a - x$$

Si E centrum gr. dicatur trianguli GAL posita licet AE majore primum quam

*) Au lieu cité dans la note 1, van Schooten a cru pouvoir se dispenser de démonstrations faites, comme celle qui va suivre, à la mode des anciens.

5) Consultez sur ce théorème la note 6, p. 295 du Tome XI.

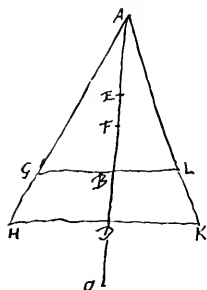
$\frac{2}{3}$ AB: Sit punctum D ita collocatum ut sicut BE ad EA ita sit qu. DA ad qu. AB + \square BAD, (quod est secundum analytin explicatam,) et ducatur HDK parall. GL. erit autem DA minor quam BA, quod sic ostenditur.

Sit duabus BA, AD tertia proportionalis AO, seu potius sit AO quae cum AB comprehendat rectang. aequale qu^o AD.

Est igitur \square BA, AO ad qu. AB + \square BA, AD hoc est AO ad utramque simul BA, AD, ut BE ad EA; sed quia AE major ponitur quam $\frac{2}{3}$ BA erit ratio BE ad EA minor quam subdupla. Ergo et AO ad BA + AD minor quam subdupla: unde liquet quod AO est minor ex tribus proportionalibus BA, DA, OA. Ergo BA major quam DA.

Porro autem quoniam est qu. DA ad qu. BA + \square BAD ut BE ad EA, h. e. ut \square EBA ad \square EAB, et permutando erit qu. DA ad \square EBA ut qu. BA + \square BAD ad \square EAB, h. e. ut BA + AD ad EA. h. e. ut \square BAD + q. AD ad \square EAD, quia verò ut q. BA + \square BAD ad \square EAB ita est \square BAD + q. AD ad \square EAD erit etiam ut q. BA + \square BAD ad \square EAB ita (aufer.^o 3^m à primo et 4^m a 2^{do}) qu. BA - q. AD ad \square EA, BD. Ergo quoque ut qu. DA ad \square EBA ita q. BA - q. DA ad \square EA, BD. h. e. ad \square BAE - \square DAE. h. e. ad \square BAE - \square BAF, (namque est BA ad DA ut AE ad AF.) h. e. ad \square BA, EF et permut.^o ut qu. DA ad q. BA - q. DA ita \square EBA ad \square BA, EF h. e. ita EB ad EF, et invert.^o Verum ut q. BA - q. DA ad qu. DA ita est frustum GK ad triang. HAK; Ergo frustum GK ad triang. HAK ut FE ad EB. Est autem secundum ea quae posita fuere E centrum grav. triang.ⁱ GAL, et F centr. grav. triang. HAK, Ergo per 8.2ⁱ Æqui. Archim. erit in B centr. gr. frusti GK, quod fieri non potest.

[Fig. 4.]



Rursum si AE minor dicatur quam $\frac{2}{3}$ AB, et E [Fig. 4] gr. centr. triang. GL, posita DA ut prius, ostendetur DA major quam BA. Et rursus per similem demonstr.^m erit in B centr. gr. frusti GK, quod absurdum.

Non est igitur AE neque major neque minor quam $\frac{2}{3}$ AB, si E futurum est triang.ⁱ GAL centr. gr. Ergo centrum grav. apparet ita dividere BA ut pars ad verticem sit subsequaltera totius, sive dupla reliquae ad basin.

DE CIRCULI MAGNITUDE INVENTA
ACCEDUNT
PROBLEMATUM QUORUNDAM ILLUSTRIMUM
CONSTRUCTIONES
1654.



Avertissement.

On fait qu' Archimède réussit à enfermer le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre entre les limites $3\frac{1}{7}$ et $3\frac{1}{8}$ en calculant les périmètres p_{96} et P_{96} des polygones inscrit et circonscrit de 96 côtés ¹⁾. Pendant plus de dix huit siècles sa méthode restait la seule connue. Sans se laisser rebuter par les calculs énormes qu'elle exigeait, Ludolf van Ceulen ²⁾ l'employa au commencement du dix-septième siècle à déterminer le nombre π jusqu' au 36^{me} chiffre ³⁾; résultat qui ne fut surpassé qu' un siècle plus tard par A. Sharp ⁴⁾ au moyen d'un développement en série.

¹⁾ Voir la „Dimensio circuli” , p. 257—271 du T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 de notre T. XI.

²⁾ Voir, sur Ludolf van Ceulen, la note 2, p. 275 du T. I.

³⁾ Dans son ouvrage de 1596 „Van den cirkel” (voir la note 2, p. 275, T. I) il trouve le nombre π jusqu' en 20 chiffres à l'aide des polygones inscrit et circonscrit de 15.2^{34} côtés. Il ajoute toutefois un 21^{me} chiffre qu' il ne peut pas avoir calculé avec ces polygones. On rencontre le même nombre jusqu' en 33 chiffres à la page 163 de l'ouvrage posthume: „De Arithmetische en Geometrische fondamenten, van Mr. Ludolf van Ceulen, Met het ghebruyck van dien In veel verscheydene constighe questien, soo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen sinuum ghesolveert. Tot Leyden, By Joost van Colster, ende Jacob Marcus. Ann. CIO IO CXV.” Enfin tous les 36 chiffres qu'il a calculés, furent incisés sur sa pierre sépulcrale, disparue depuis, qui se trouvait dans l'église de Saint-Pierre à Leyde. Il les calcula probablement à l'aide des polygones de 2^{62} côtés, puisque dans le „Cyclometricus” de Snellius (voir la note 6), où les 36 chiffres de van Ceulen sont mentionnés à la p. 55, on rencontre à la p. 54 le passage suivant: „Diligentissimus logista, Ludolphus noster, initio facto à latere quadrati eandem inscriptarum inventionem sexagies continuavit.” Or, le nombre 36 des chiffres est en accord parfait avec l'emploi de ces polygones.

⁴⁾ Voir l'ouvrage de Sherwin „Mathematical Tables, Contriv'd after a most comprehensive

C'était Willebrord Snellius ⁵⁾ qui, le premier, dans son „Cyclometricus” ⁶⁾, publié en 1621, fut se référer les limites ⁷⁾, indiquées par Archimède, sans aug-

Method: Containing, Dr. Wallis's Account of Logarithms, Dr. Halley's and Mr. Sharp's Ways of constructing them; with Dr. Newton's contraction of Briggs's Logarithms, viz. A Table of Logarithms of the Numbers from 1 to 10100, with the means to find readily the Logarithm of any Number, and the Number of any Logarithm, to seven places of Figures; and Tables of natural and logarithmic Sines, Tangents, Secants, and Versed-sines, to every minute of the Quadrant: with the Explication and Use prefix'd. London: Printed for William Mount and Thomas Page, at the Postern on Tower Hill, M, DCC, V. Aux pages 56—59 le nombre π est donné jusqu' en 73 chiffres (dont le dernier est d'une unité trop petit) à l'aide du développement en série $\pi = 6 \arctg \frac{1}{3} = (1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots) \frac{1}{12}$.

⁵⁾ Voir, sur Snellius, la note 8, p. 523 du T. I.

⁶⁾ Willebrord Snellii R. F. Cyclometricus, De circuli dimensione secundum Logistarum abacos, & ad Mechanicam accuratissima; atque omnium parabolis. Eiusdemque usus in quarumlibet adscriptarum inventionem longe elegantissimus, & quidem ex ratione diametri ad suam peripheriam data. Lugduni Batavorum, Ex Officina Elseviriana, Anno MDCLXXI.

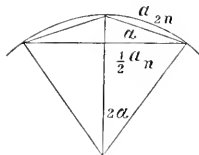
⁷⁾ Pour comparer entre elles les approximations diverses de la circonférence du cercle on peut se servir avec avantage de la suite:

$$(1) \quad 2\pi = p_{2n} + \frac{1}{3} (p_{2n} - p_n) + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{2}{35} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} + \\ + \frac{8}{315} \frac{(p_{2n} - p_n)^4}{p_{2n}^3} + \frac{8}{693} \frac{(p_{2n} - p_n)^5}{p_{2n}^4} + \dots$$

où p_n désigne le périmètre du polygone régulier à n côtés, inscrit dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité.

On obtient cette suite en partant de la relation évidente:

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} = \arccos \frac{a_n}{2a_{2n}} = \arccos \frac{p_n}{p_{2n}} = \arcsin \frac{1}{p_{2n}} \frac{p_{2n}^2 - p_n^2}{p_{2n}}$$



où α représente la moitié de l'arc soutenu par le côté a_{2n} du polygone inscrit à $2n$ côtés. Ensuite on n'a qu'à développer l'arc \sin par la série bien connue, à remplacer n par sa valeur, quise déduit de la formule $p_{2n} = 2n \sin \alpha = 2n \frac{1}{p_{2n}} \frac{p_{2n}^2 - p_n^2}{p_{2n}}$, et les facteurs $p_{2n} + p_n$ par $2p_{2n} - (p_{2n} - p_n)$.

Au cas où les approximations en question ont été exprimées à l'aide des périmètres P des polygones circonscrits ou des aires s et S des polygones inscrits ou circonscrits, nous les réduisons préalablement par les formules $P_{2n} = P_n^2 : p_n$, $s_{2n} = \frac{1}{2} p_n$, $S_n = \frac{1}{2} P_n$; dont la première est identique avec le „Theor. X, Prop. XIII” de Huygens (p. 149 du Tome présent) et équivalente à la relation $s_{2n}^2 = s_n S_n$, déduite par Snellius dans la Prop. IX, p. 14 de l'ouvrage cité dans la note précédente.

De cette manière les limites Archimédiennes s'écrivent:

$$p_{2n} < 2\pi < p_{2n} + \left[\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_n} \right] = P_{2n}$$

Ajoutons qu'on peut évaluer les différences avec la formule exacte à l'aide des relations approchées $p_{2n} - p_n = \pi^3 : 4 n^2 = 7,75 : n^2$ et $(p_{2n} - p_n) : p_{2n} = 1,234 : n^2$.

menter le nombre des côtés des polygones employés; mais les deux théorèmes ⁸⁾ qu' il donne à ce propos, quoique vrais, n'avaient pas été prouvés rigoureusement par lui, comme Huygens l'a remarqué et que nous le montrerons à propos des démonstrations rigoureuses par lesquelles Huygens a remplacé les raisonnements de Snellius ⁹⁾.

⁸⁾ Voici les limites indiquées dans les Prop. XXVIII (p. 42, limite inférieure) et XXIX (p. 43—44, limite supérieure) de l'ouvrage de Snellius :

$$\frac{3p_{2n}^2}{2p_{2n} + p_n} < 2\pi < \frac{1}{3}(p_{2n} + 2p_n) = \frac{p_{2n}(p_{2n} + 2p_n)}{3p_n},$$

c'est-à-dire (comparez les notes 30 et 33, pp. 156 et 159) :

$$p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{1}{9} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{9p_{2n}(2p_{2n} + p_n)} \right] < 2\pi < p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{1}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{3p_n p_{2n}} \right].$$

Par la comparaison avec la suite (1) de la note 7, on trouve donc pour la différence de la valeur exacte de 2π d'avec la limite inférieure à peu près $\frac{1}{45}(p_{2n} - p_n)^2 : p_{2n}$ et pour celle d'avec la limite supérieure à peu près neuf fois cette valeur.

Une rectification de l'arc de cercle, exposée par le Cardinal de Cuse (1401—1464) dans son ouvrage „De mathematica perfectione” coïncide avec la limite inférieure de Snellius, comme on le voit aisément en comparant la note 33, p. 159 du Tome présent, avec la proposition suivante, qu'on trouve à la p. 106 recto de l'édition des Œuvres de de Cuse de 1514 par J. Faber Stapulensis: „Illa est habitudo trium semidiametrorum ad tres semidiametros minus sagittae cordae quadrantis & minoris: quae est cuiuslibet arcus ad suam chordam.” C'est en appliquant cette proposition à l'angle de 60° que de Cuse a obtenu la valeur $\pi = 18 : (4 + 1\frac{1}{3}) = 3,140237\dots$ qu'il donne (p. 107 recto) comme exacte. De plus, dans les commentaires d'Omnesanctus, qui accompagnent dans l'édition citée le texte de de Cuse, on retrouve p. 111 recto la construction même de Snellius décrite au „Theorema XIII”, p. 159 du Tome présent.

Une autre approximation remarquable, mais bien inférieure à celles de Snellius, fut indiquée par Lansbergen dans ses „Cyclometriae novae libri duo, Middelburgi, 1616.” Elle revient à poser :

$$2\pi = p_{2n} + \frac{p_{2n} - 4}{p_n}(p_{2n} - p_n),$$

c'est-à-dire, pour un polygone d'un grand nombre de côtés à peu près $2\pi = p_{2n} + 0,3634 \cdot (p_{2n} - p_n)$. Elle est donc presque onze fois plus approchée que celle $2\pi > p_{2n}$ d'Archimède.

Van Lansbergen l'employa à calculer 30 chiffres du nombre π à l'aide du polygone de 2^{46} côtés (p. 34); mais ce résultat était flatté quant aux deux derniers chiffres; comme on peut s'en assurer en se servant des relations approchées de la note 7. Appliquée à un polygone donné, sa méthode ne permet en général de pousser l'approximation qu'un seul chiffre plus loin que la méthode Archimédienne; tandis que celle de Snellius double, au moins, le nombre des chiffres connus et lui permet ainsi de vérifier 35 des 36 chiffres de Ludolf van Ceulen à l'aide des polygones de 2^{29} et 2^{30} côtés. Mais nous nous réservons de revenir sur cette question du nombre des chiffres plus loin dans la note 15, p. 142 du Tome présent.

D'ailleurs ces approximations de de Cuse et de van Lansbergen ne permettent pas d'enfermer le rapport cherché dans des limites bien définies comme Snellius l'a fait.

⁹⁾ Voir les notes 32 et 33 p. 158 et 159 du Tome présent.

Telle était la situation lorsque, en janvier ou février 1654, Huygens commença à s'occuper de la mesure du cercle ¹⁰⁾. En très peu de temps il arriva à des résultats qui lui donnaient beaucoup de satisfaction ¹¹⁾. Au commencement de mars il en communiqua quelques uns à van Schooten et à Lipstorp ¹²⁾; d'où il paraît que déjà alors Huygens était en possession des deux derniers théorèmes ¹³⁾ que, dans son ouvrage, il a déduits des propriétés du centre de gravité et qui, puisqu'ils leur approximation est d'un ordre plus élevé, permettent de tripler au lieu de doubler, comme le font les théorèmes de Snellius, le nombre des chiffres, déduisibles de deux polygones donnés de n et de $2n$ côtés, c'est-à-dire, en comparant ce nombre à celui fourni par la méthode Archimédienne. Il nous semble même qu'il y a là une indication que l'idée première, qui a amené toutes ces recherches, de cyclométrie, était qu'on pourrait obtenir une mesure plus rapprochée du cercle en utilisant les propriétés du centre de gravité, desquelles Huygens s'était déjà occupé dans ses „Theoremata de quadratura hyperbolæ, ellipsis et circuli” ¹⁴⁾. En outre, on trouve indiquée dans les lettres mentionnées à Lipstorp

¹⁰⁾ Voir la Lettre N^o. 176, p. 268 du T. I.

¹¹⁾ Voir la Lettre N^o. 176, déjà citée: „Ego sane eadem rei à paucis diebus intentus sum, atque ea quæ inveni Theoremata placent mihi prae omnibus alijs quæ scripsi hactenus.” Et comparez encore les pp. 277, 281 et 288 du T. I.

¹²⁾ Voir les Lettres N^o. 181 et N^o. 183, pp. 274-277 du T. I.

¹³⁾ Voir, pour le premier les dernières lignes du „Theor. XVI. Propos. XIX”, p. 171 du Tome présent, et pour le second les lignes cursives, p. 175 de ce même Tome. Ces théorèmes conduisent aux inégalités suivantes (comparez les notes 47 et 52, pp. 168 et 175):

$$p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{2}{25} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} +$$

$$+ \left[\frac{6}{25} \frac{(p_{2n} - p_n)^4}{p_{2n}^2 (2p_{2n} + 3p_n)} \right] > 2\pi,$$

$$p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{2}{675} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} -$$

$$- \left[\frac{2}{675} \frac{(2014p_{2n} - 979p_n)(p_{2n} - p_n)^4}{(44p_{2n}^2 + 92p_n p_{2n} + 89p_n^2)p_{2n}^2} \right] < 2\pi,$$

dont les trois premiers termes coïncident avec ceux de la suite (1) de la note 7, tandis que chez les limites de Snellius de la note 8 la coïncidence cesse dès le second terme.

Et que ces théorèmes étaient connus de Huygens lorsqu'il écrivit les lettres en question, cela s'ensuit des résultats numériques qu'il assure avoir obtenu à l'aide des polygones de 30 et de 60 côtés. A l'exception du nombre 31415926537, où il faut remplacer le 7 par un 8, ces résultats sont identiques avec ceux du „Problema IV. Propos. XX” (p. 179 du Tome présent) et n'auraient pu être calculés sans l'emploi des théorèmes mentionnés.

¹⁴⁾ Voir l'ouvrage de 1651, reproduit aux p. 288-313 du Tome XI, et consultez encore la

et à van Schooten la construction approchée de la circonférence du cercle, laquelle constitue le premier „Aliter” du „Problema II. Prop. XI”¹⁵⁾.

Un peu plus tard il a trouvé le théorème que la circonférence du cercle est moins que la moindre des deux proportionnelles entre les périmètres des polygones inscrit et circonscrit du même nombre de côtés à laquelle Oronce Fine avait prétendu qu'elle était égale dans le cas du carré¹⁶⁾. Il préfère ce théorème à tous les autres¹⁷⁾, probablement à cause de sa simplicité et de la difficulté qu'il a eue à le trouver, bien que ce théorème se prête bien moins que les autres au calcul et que l'approximation qu'il fournit est d'un ordre inférieur à celui des théorèmes plus compliqués dont nous avons parlé¹⁸⁾. Il le mentionne à Kinner a Löwenthorn dans une lettre du 23 mars 1654¹⁹⁾ en le cachant sous l'énigme „Minor minore incognita,” qu'il lui prie de vouloir communiquer à Marcus Marci, pour savoir, si celui-ci, qui était en train de préparer un ouvrage de Cyclo-métrie²⁰⁾, avait trouvé le même théorème²⁰⁾.

Vers la fin de mars le manuscrit est achevé et remis à van Schooten pour en avoir son avis. Mais voilà que Huygens commence à douter si ce qu'il appelle la seconde partie de son ouvrage, c'est-à-dire celle qui débute par le „Theor. XIV. Propos. XVII” et contient la considération des centres de gravité, devrait bien être publiée. L'usage qu'il y a fait de la construction d'une parabole dans la démonstration du Théorème XIV lui déplaît, cependant il ne pourrait éviter

Lettre à van Schooten du 1 avril 1654 (p. 279 du T. I), où la connection qui existe entre ces deux derniers théorèmes et les „Theoremata” est mentionnée expressément.

¹⁵⁾ Voir la p. 145 du Tome présent.

¹⁶⁾ Voir le premier alinéa de la p. 157 du Tome présent.

¹⁷⁾ Voir la „Praefatio” à la p. 115 du Tome présent et consulter au Tome I les lettres à Kinner a Löwenthorn (pp. 279 et 290), à Grégoire de Saint-Vincent p. 281 et à Golius p. 289.

¹⁸⁾ On a d'après le théorème en question, qu'on trouve p. 151 du Tome présent: $2\pi < \sqrt[3]{p_{2n}^2 p_{2n}}$; c'est-à-dire, en appliquant une des formules de la note 7:

$$2\pi < p_{2n}^{\frac{2}{3}} p_n - \frac{1}{3} = p_{2n} \left(1 - \frac{p_{2n} - p_n}{p_{2n}} \right) - \frac{1}{3} = p_{2n} + \frac{1}{3} (p_{2n} - p_n) + \frac{2}{9} \left(\frac{p_{2n} - p_n}{p_{2n}} \right)^2 + \dots$$

C'est donc le troisième terme qui diffère de celui de la suite de la note 7 et l'approximation est de l'ordre de celles de Snellius.

¹⁹⁾ Voir la p. 279 du T. I. Huygens avait été averti des intentions de Marci par le même Kinner dans ses lettres du 29 novembre 1653 (p. 252 du T. I) et du 28 février 1654 (p. 269 du T. I); d'après cette dernière lettre l'ouvrage serait publié vers Pâques de l'année 1654. Il parut en effet dans cette année 1654 sous le titre: „Labyrinthus in quo via ad circuli quadraturam pluribus modis exhibetur. Praegae, 1654.”

²⁰⁾ Voir la réponse de Kinner à la page 284 du T. I. Marcus Marci n'a pas pu pénétrer le mystère, ce qui n'est guère étonnant vu qu'il n'avait pas trouvé le théorème.

de le répéter s'il voulait donner la démonstration du Théorème curvif de la „Prop. XX.” Il incline à supprimer toute cette partie, sauf à mentionner dans la préface les „Prop. XIX et XX” ²¹⁾ pour s'en réserver la priorité.

Cette seconde partie est en effet moins élégante et moins exclusivement géométrique que la première; mais de l'autre côté les théorèmes auxquels Huygens y est arrivé par la considération des centres de gravité constituent un progrès bien plus marqué dans la mesure approchée du cercle, que ne le font ceux de la première partie lesquels mènent à des approximations du même ordre ²²⁾ que celles qu'on obtient par les théorèmes de Snellius, qui, il est vrai, ne faisait pas les démontrer. D'ailleurs ni les théorèmes de Snellius, ni ceux de Huygens, n'ont jamais servi à déterminer de nouveaux chiffres, inconnus jusqu'alors, du rapport de la circonférence au diamètre. Cela était réservé à des calculateurs plus infatigables que Huygens ou Snellius, à l'aide de procédés plus modernes. Toutefois on ne regrettera pas que Huygens, suivant en cela le conseil de van Schooten, a renoncé à son dessein d'omettre cette seconde partie.

Dans la même lettre, très importante, du 1^{er} avril 1654 ²³⁾ on trouve mentionnée pour la première fois l'intention de Huygens, à laquelle il a donné suite, de joindre à son traité de cyclométrie les „Illustrum quorundam problematum constructiones.”

Deux fois encore, Huygens, qui était dans la crainte d'être devancé par Marci, a dû rappeler à van Schooten, qu'il attendait son avis. Enfin, le 19 avril ²⁴⁾, celui-ci renvoya les manuscrits avec ses excuses, beaucoup de louanges, des annotations que nous ne connaissons pas, et le conseil, déjà mentionné, de n'en pas supprimer la seconde partie, dont les démonstrations lui semblaient suffisamment élégantes.

²¹⁾ Voir les pages 169—175 du Tome présent et consulter sur les deux théorèmes en question la note 13.

²²⁾ En outre de la limite supérieure de Snellius (voir la note 8), qui résulte du „Theor. IX”, p. 137, et de celle déjà mentionnée dans la note 18, on rencontre encore dans la première partie les deux limites suivantes, qui, traitées de la manière décrite dans la note 7, s'écrivent:

$$p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) < 2\pi \text{ („Theor. V et Theor. VII”, pp. 129 et 133),}$$

$$\frac{1}{3}(2p_{2n} + p_{2n}) = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{2}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{2}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}} \right] >$$

$$> 2\pi \text{ (Theor. VI, p. 131).}$$

L'écart de la suite de la note 7 y commence avec le troisième terme.

²³⁾ Voir les p. 279—280 du T. I.

²⁴⁾ Voir les p. 285—286 du Tome I, et consulter sur les rappels du 9 et du 17 avril 1654 les pp. 282 et 285 du même Tome.

Enfin le 1^{er} juillet 1654 Huygens put expédier à van Schooten et à quelques autres savants ²⁵⁾ les premiers exemplaires du livre imprimé.

Plus tard Huygens est revenu à deux reprises au sujet de la mesure approchée du cercle. La première fois, en 1659, à l'occasion de ses recherches sur la cycloïde. Ayant découvert que le centre de gravité d'un arc cycloïdal, symétrique par rapport à l'axe, se trouve à deux tiers de la flèche, comptée depuis la corde, l'idée lui vient que par la comparaison de la situation de ce centre de gravité avec celle du centre de gravité d'un arc de cercle, il pourra arriver à une limite pour la mesure du cercle, de même que, précédemment, dans l'ouvrage que nous traitons, il avait atteint le même but en comparant la situation des centres de gravité d'un segment de cercle et d'un segment parabolique ²⁶⁾. Et, en effet, il trouve de cette manière une limite inférieure identique, au fond, avec celle de Snellius ²⁷⁾.

²⁵⁾ Voici la liste des personnes auxquelles Huygens fit parvenir un exemplaire: Golius (voir T. I, p. 287, note 4 et p. 289), Van Schooten (T. I, p. 287), le Ducq (p. 287, note 4), Kraen (même note), van der Wal, P. de Chanut, C. de Briene, F. Blondel, Stevin, la bibliothèque (de Leiden?) (toujours la même note), Kinner a Löwenthorn (même note et p. 288, note 3, p. 290 et p. 315, T. I), Grégoire de Saint-Vincent (même note, p. 288 et 290—291, T. I), de Sarasa (même note et p. 288, T. I), Tacquet et van Gutschoven (même note et p. 290, note 4), de Bie (p. 290, note 4); ensuite à J. J. Stöckar, 13 octobre 1654, (T. I, p. 298), la Princesse Palatine Elisabeth, décembre 1654, (T. I, p. 316—317), A. Colvius, mars 1655, (T. I, p. 322), Mylon, février 1656, (T. I, p. 376), De Carcavy et de Fermat, septembre 1656 (T. I, p. 494), Moray et Hobbes, 20 décembre 1662 (T. IV, p. 280), Pr. de Montbéliard, 15 janvier 1670 (d'après une annotation p. 254 du livre D des „Adversaria”). De quelques endroits de la „Correspondance” on doit conclure qu'on ne pouvait trouver l'ouvrage chez les libraires à Paris (T. I, p. 400, T. VI, p. 235), ni à Londres (T. VI, p. 373).

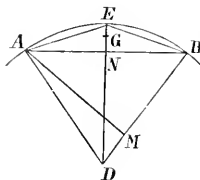
²⁶⁾ Comparez le dernier alinéa de la p. 97 du Tome présent.

²⁷⁾ Le calcul en question s'appuie sur ce que le centre de gravité G d'un arc de cercle AEB doit être plus près de la corde AB que le centre de gravité d'un arc cycloïdal symétrique ayant la même flèche NE; ce qui est d'ailleurs une conséquence presque évidente du fait que la courbure de l'arc cycloïdal augmente régulièrement avec la distance du sommet. On a donc $GN < \frac{2}{3} NE$.

Posant ensuite $DE = r$, $AB = a_{2n}$, $AM = \frac{1}{2} a_n$, $NE = p$, on a

$$\begin{aligned} DG &= \frac{a_{2n}}{\text{arc AEB}} r < (r - \frac{1}{3} p); \text{ donc : arc AEB} = \\ &= \frac{2\pi r}{2n} > \frac{3r}{3r - p} a_{2n} \end{aligned}$$

Mais de la proportion $DN : DB = AM : AB$, c'est-à-dire :



Une seconde fois, en 1668, il est ramené au même sujet par sa polémique avec Gregory, au cours de laquelle il trouve, entre autres, une nouvelle approximation semblable à celles de la note 13 et une construction approchée pour la mesure d'un arc de cercle ²⁸⁾, laquelle il a déduite de la seconde partie du „Theor. XVI. Prop. XIX”. Mais nous traiterons ces nouvelles recherches avec plus de détail à leur propre place.

Si, pour l'ouvrage „De circuli magnitudine inventa”, aucun manuscrit contenant des travaux préliminaires ne nous est connu, il en est tout autrement pour les „Illustrum quorundam problematum constructiones.” En effet, lorsque le premier avril 1654, Huygens communiqua, comme nous l'avons vu, à van Schooten son intention de joindre au premier ouvrage les solutions de quelques problèmes qui n'avaient cessé d'occuper les géomètres anciens et modernes, il était déjà en possession de plusieurs de ces solutions, qu'il avait mises par écrit dans le manuscrit ²⁹⁾ qui nous a fourni le texte des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653” ³⁰⁾. Il n'avait qu'à choisir et à perfectionner ceux qu'il voulait admettre dans la publication projetée, ce qui, à son avis, ne manquerait pas d'augmenter le nombre des mathématiciens qui désireraient la posséder ³¹⁾. Et si, dans cette publication, il ne donne des problèmes que les constructions avec des démonstrations rédigées à la mode des anciens, sans ajouter les analyses qui y ont conduit, le même manuscrit supplée en grande partie à cette lacune et ne laisse aucun doute sur les méthodes suivies.

$$(r - p) : r = \frac{1}{2} a_n : a_{2n},$$

on déduit successivement :

$$r - p = \frac{a_n r}{2a_{2n}}; \quad 3r - p = \frac{(4a_{2n} + a_n)r}{2a_{2n}}.$$

On trouve donc, en posant $r = 1$:

$$2\pi > \frac{12n a_{2n}^2}{4a_{2n} + a_n} = \frac{6a_{2n} p_{2n}}{4a_{2n} + a_n} = \frac{3p_{2n}^2}{2p_{2n} + p_n},$$

conforme à la limite inférieure de la note 8.

²⁸⁾ Voir la note 51 au dernier alinéa de la p. 174 du Tome présent et la page 275 du T. VI.

²⁹⁾ Le manuscrit N°. 12, mentionné dans la note 1, T. XI, p. 7.

³⁰⁾ Voir les p. 1—89 du Tome présent.

³¹⁾ Voir la p. 280 du T. I.

En effet, ces méthodes de traiter les problèmes solides, c'est-à-dire ceux qui mènent à des équations cubiques ou biquadratiques, ont déjà été discutées dans l'„Avertissement” des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653”³²⁾. Il y en a deux; en voici la *première* qui a servi pour les problèmes I et VIII des „*Illustrium quorundam problematum constructiones*”:

Après avoir obtenu, par l'analyse, l'équation cubique qui résout le problème, Huygens en fait disparaître le second terme, suivant en cela la règle donnée par Descartes dans sa „*Géométrie*”; ensuite il applique à l'équation réduite la solution par la trisection de l'angle, ou, si elle fait défaut, celle qui emploie les intersections de la parabole et du cercle, solutions qu'on trouve exposées toutes les deux dans ce même ouvrage de Descartes; enfin Huygens cherche à simplifier la construction obtenue de manière à économiser autant que possible sur les lignes à tirer³³⁾.

La *seconde* plus spéciale qui a conduit aux constructions des problèmes III—VII est plus originale³⁴⁾. Huygens se pose un problème très général exigeant par exemple l'égalité de deux segments dont l'un se trouve sur une droite mobile. La solution de ce problème amène une équation biquadratique. Alors Huygens spécialise les données du problème de manière à simplifier systématiquement l'équation obtenue jusqu'à ce qu'elle se réduise à une équation quadratique, comme dans les problèmes IV—VII, ou à une équation cubique binomiale, comme dans le cas des trois solutions du problème III. Dans ce dernier cas Huygens est en possession d'une solution du problème des deux moyennes proportionnelles, pourvu qu'on considère accomplie l'égalisation des deux segments. Comme nous l'avons montré dans l'„Avertissement” que nous venons de mentionner, cette seconde méthode fut inspirée à Huygens à l'occasion de ses recherches sur l'origine possible de la solution de Nicomède de ce même problème.

Voici d'ailleurs, pour chacun des problèmes des „*Illustrium quorundam problematum constructiones*” en particulier, l'historique des recherches de Huygens.

³²⁾ Voir les p. 3—8 du Tome présent.

³³⁾ Comparez le second alinéa de la p. 4, et pour le „Probl. VIII” les p. 83—86 du Tome présent.

³⁴⁾ Comparez les p. 4—6 du Tome présent à commencer par le troisième alinéa de la p. 4.

PROBL. I ³⁵⁾.

Couper une sphère donnée par un plan de manière que les segments soient entre eux dans un rapport donné.

C'est le premier des problèmes solides entamés par Huygens. L'antiquité en avait légué trois solutions complètes rapportées par Eutocius ³⁶⁾; l'une due probablement à Archimède, les autres à Dionysidore et à Dioclès. Elles s'accomplissent à l'aide des intersections d'une hyperbole avec une parabole ou avec une ellipse. Archimède dans son ouvrage „De sphaera et cylindro” avait traité le problème mais sans en achever la solution ³⁷⁾.

Le 13 janvier 1652 Huygens en élabore une solution nouvelle par la première des méthodes que nous venons d'esquisser ³⁸⁾. Il y emploie les intersections d'une parabole et d'un cercle, considérant une telle construction plus simple que celles où l'on fait usage d'autres coniques; mais il préfère à toutes les autres les constructions par la trisection de l'angle. Il en trouve une de cette façon au 31 janvier 1652 ³⁹⁾ et la simplifie encore à deux reprises ⁴⁰⁾.

PROBL. II ⁴¹⁾.

Trouver un cube double d'un cube donné.

Le problème est un cas particulier du „Probl. III”. Des rédactions antérieures des deux solutions dont l'une est rigoureuse et l'autre approximative, se trouvent aux p. 45—48 du Tome présent, sous les dates du 1^{er} et du 2 mars 1652. Les raisonnements qui ont conduit à ces solutions nous sont inconnus. La solution rigoureuse a passé sans modification importante dans le texte de l'ouvrage présent; mais la démonstration de la solution approximative a été notablement abrégée.

³⁵⁾ Voir les p. 183—189 du Tome présent.

³⁶⁾ Voir les notes 15 et 17, p. 12 du Tome présent.

³⁷⁾ Voir la note 16, p. 12 du Tome présent.

³⁸⁾ Voir la p. 101, qui précède.

³⁹⁾ Voir les p. 16—18 du Tome présent.

⁴⁰⁾ Voir les notes 3 et 4, p. 16 et la note 6, p. 184 du Tome présent.

⁴¹⁾ Voir les p. 189—191 du Tome présent.

PROBL. III ⁴²⁾.*Trouver deux moyennes proportionnelles à deux droites données.*

De ce problème célèbre l'antiquité connaissait plusieurs solutions, recueillies par Eutocius dans ses „Commentaires” sur le deuxième livre de l'ouvrage „De sphaera et cylindro” d'Archimède ⁴³⁾. Descartes y avait ajouté une nouvelle à l'aide du cercle et de la parabole ⁴⁴⁾.

Parmi elles celle de Nicomède avait grandement intrigué Huygens et l'avait conduit, comme nous l'avons dit, à la seconde de ses méthodes de résolution des problèmes solides.

L'ayant inventée le 30 janvier 1652, il ne tarde pas à appliquer cette méthode au même problème général, qui avait amené la construction de Nicomède, pour obtenir, cette fois, de nouvelles solutions des „Probl. IV—VII” ⁴⁵⁾, qui sont des cas particuliers de ce problème. Ensuite il se met à chercher à son aide de nouvelles solutions, analogues à celle de Nicomède, du problème des deux moyennes. Les pièces N^o. XI et XII ⁴⁶⁾ des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653” nous font connaître les résultats de ces recherches. Des solutions obtenues celle de la pièce N^o. XI, trouvée le 9 mars 1652 et remaniée le 10 mars 1652, donnait naissance à la première construction ⁴⁷⁾ qu'on trouve dans l'ouvrage présent. Un nouveau remaniement conduisit le 5 juin à la seconde construction ⁴⁸⁾ et on reconnaît la troisième ⁴⁹⁾ dans celle, datée du 16 mars, de la pièce N^o. XII ⁵⁰⁾ des „Travaux” mentionnés.

Après la publication des „Illustrium quorundam problematum constructiones” le problème n'a pas cessé d'intéresser Huygens. Il y est revenu à plusieurs reprises.

⁴²⁾ Voir les p. 191—197 du Tome présent.

⁴³⁾ Voir les p. 14—27 de l'édition de Bâle, citée p. 137 du T. I, note 1, ou les p. 66—127 du T. III de l'édition de Heiberg, citée p. 50 du T. XI, note 2.

⁴⁴⁾ Dans sa „Géométrie”, voir les p. 469—470 du T. VI des „Œuvres de Descartes” publiées par Charles Adam et Paul Tannery.

⁴⁵⁾ Voir les p. 199—211 du Tome présent et consulter les pièces VI et VII, p. 26—37 de ce même Tome.

⁴⁶⁾ Voir les p. 49—56 du Tome présent.

⁴⁷⁾ Voir les p. 191—195 du Tome présent.

⁴⁸⁾ Voir la p. 195 et comparer la dernière partie de la pièce N^o. XI des „Travaux”, p. 52—53.

⁴⁹⁾ Voir la p. 197.

⁵⁰⁾ Voir les p. 54—56.

La première fois en 1657 à l'occasion de sa correspondance avec de Sluse. Le 11 juillet de cette année, dans sa première lettre à Huygens ⁵¹⁾, de Sluse lui envoya du problème en question deux solutions, que nous ne connaissons pas. D'après la réponse de Huygens ⁵²⁾ l'une d'elles lui était entièrement nouvelle; l'autre avait beaucoup de rapport avec la dernière de celles qu'il avait publiées. Ensuite dans sa lettre du 31 juillet ⁵³⁾ de Sluse assura Huygens qu'il savait résoudre le problème des deux moyennes d'un nombre indéfini de modes divers. Alors Huygens lui demanda ⁵⁴⁾ s'il savait accomplir la construction à l'aide des intersections d'un cercle et d'une ellipse ou par la trisection d'un angle; lui-même, il se rappelait d'avoir cherché vainement une telle construction. Aussitôt de Sluse répondit ⁵⁵⁾ qu'il le savait de plusieurs manières. Cela décida Huygens à se remettre à l'ouvrage.

Le 3 septembre il pouvait annoncer qu'il avait trouvé une solution de cette manière; mais elle lui semblait trop compliquée ⁵⁶⁾. Enfin le 8 septembre il trouvait mieux. Il élabora cette nouvelle solution dans une pièce que nous reproduisons comme „Appendice I” ⁵⁷⁾ aux „*Illustrium quorundam problematum constructiones*”. Le 28 septembre il la mentionna à van Schooten ⁵⁸⁾ et la communiqua à de Sluse dans sa lettre du 12 octobre 1657 ⁵⁹⁾. Celui-ci lui répondit ⁶⁰⁾ qu'il en possédait une autre plus concise et aussi universelle qu'il envoya à Huygens le 7 juin 1658 ⁶¹⁾. On la retrouve dans son „*Mesolabum*” comme „*Propositio quarta*” ⁶²⁾.

Cependant Huygens avait découvert une nouvelle méthode pour résoudre les problèmes solides. Il l'applique au problème des deux moyennes dans une pièce que nous donnons comme „Appendice II” ⁶³⁾. Il y retrouve les constructions de Ménechme, rapportées par Eutocius” ⁶⁴⁾.

⁵¹⁾ Voir la p. 36 du T. II.

⁵²⁾ Voir les p. 37—38 du T. II.

⁵³⁾ Voir la p. 43 du T. II.

⁵⁴⁾ Dans sa lettre du 13 août 1657; voir la p. 45 du T. II.

⁵⁵⁾ Voir sa lettre du 14 août 1657 (V. S. ?), p. 47 du T. II.

⁵⁶⁾ Voir la p. 51 du T. II.

⁵⁷⁾ Voir les p. 217—221 du Tome présent.

⁵⁸⁾ Voir la p. 58 du T. II.

⁵⁹⁾ Voir les p. 66 et 67 du T. II.

⁶⁰⁾ Dans sa lettre du 19 octobre; voir la p. 71 du T. II.

⁶¹⁾ Voir la p. 182 du T. II.

⁶²⁾ Voir les pages 14—16 de la seconde édition, citée p. 478 du T. II.

⁶³⁾ Voir les p. 222—224 du Tome présent.

⁶⁴⁾ Voir au lieu cité dans la note 43 les p. 20—21 de l'édition de Bâle; Heiberg, T. III, p. 92—99.

Ce fut en juillet 1659 que Huygens reçut enfin un exemplaire du „Mesolabum”⁶⁵⁾, si longtemps attendu. Il y trouvait plusieurs solutions du problème des deux moyennes proportionnelles et de quelques autres problèmes solides, avec leurs démonstrations à la mode des anciens; mais sans l’analyse qui les avait amenées et que de Sluse se réservait de publier plus tard, ce qu’il fit en 1668 à l’occasion de la seconde édition du „Mesolabum” dans la „Pars altera de analysi”.

Huygens était beaucoup intrigué par les solutions, puisqu’il reconnut qu’il ne pouvait pas les déduire à l’aide des méthodes qu’il possédait. Il se mit donc à la recherche de nouveaux artifices par lesquels il réussit en effet à retrouver quelques unes des plus belles constructions de de Sluse. C’est là l’origine de la pièce, que nous publions comme „Appendice III”⁶⁶⁾.

En 1664, le même sujet revient pour un moment⁶⁷⁾ dans la correspondance avec de Sluse, sans provoquer, du côté de Huygens, de nouveaux efforts. Il en est de même en 1668 lors de la publication de la seconde édition du „Mesolabum”, où la méthode de de Sluse fut révélée et se montrait être très différente de celles

⁶⁵⁾ Cette première édition, citée p. 311, note 3, T. II, est extrêmement rare. Le Paige, l’éditeur de la Correspondance de de Sluse, n’en connaissait que deux exemplaires dont l’un se trouvait dans une bibliothèque particulière et l’autre dans la Bibliothèque nationale de Paris. Par la bienveillance de l’un des bibliothécaires de cette dernière, M. M. Vienne, nous sommes en état de fournir les renseignements suivants sur cette édition. Le texte en est identique avec les 43 premières pages de la seconde édition en excluant le dernier alinéa „Ostensum est”, etc. Elle contient donc le „Mesolabum” proprement dit, intitulé: „Mesolabum seu duae mediae proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exhibitae” avec la dédicace au Prince Léopold et l’introduction au lecteur, qui le précèdent, et ensuite encore le chapitre „De problematum solidorum constructione per easdem lineas iisdem infinitis modis”, à l’exception du „Lemma ultimum”, de la „Propositio ultima” et de l’alinéa cité de la page 43 qui leur sert d’introduction. La „Pars altera de analysi” et les „Miscellanea” de la seconde édition, manquent complètement dans la première.

Quant à l’insertion dans la seconde édition de la „Propositio ultima”; elle est due à la correspondance avec Huygens. En effet, l’idée de Johan de Witt (voir la lettre N^o. 663, p. 477 du T. II) que les constructions de problèmes solides gagneraient en élégance si l’on pouvait les exécuter à l’aide des intersections de cercles avec une conique donnée, tracée d’avance, cette idée n’était pas venue à de Sluse lors de la première édition du „Mesolabum”. Toutefois comme il le remarque dans la lettre citée N^o. 663, du 9 septembre 1659, des constructions de cette façon pouvaient être déduites aisément de celles qu’il avait publiées. C’est ce qu’il a fait pour le problème des deux moyennes dans cette „Propositio ultima”, en employant un artifice semblable à celui dont Huygens s’est servi dans la seconde partie de l’„Appendice I”, p. 221 du Tome présent.

⁶⁶⁾ Voir les p. 225—231 du Tome présent.

⁶⁷⁾ Voir les pp. 123, 127 et 133 du T. V.

de Huygens, comme celui-ci l'avoua dans la lettre par laquelle il accusa la réception d'un exemplaire de cette édition ⁶⁸⁾.

Ce ne fut qu'en 1680 que Huygens s'occupa de nouveau des mêmes questions dans une communication, faite à l'Académie des sciences, intitulée: „Methode pour construire les Equations cubiques et quarréquarrés en les resolvant en deux lieux”, dont nous ne connaissons que le début ⁶⁹⁾.

Enfin en 1682 il composa un petit mémoire inédit: „Constructio problematum foliorum per resolutionem aequationis in duos Locos” ⁷⁰⁾. Nous publierons ces pièces en leur propre lieu.

PROBL. IV ⁷¹⁾.

Etant donné un carré dont l'un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée, qui passe par le sommet opposé.

C'est de tous les problèmes des „Illustrium quorundam problematum constructiones”, celui dont Huygens s'est occupé le premier, savoir dans la pièce N°. IV des „Travaux mathématiques divers de 1650” ⁷²⁾. Pappus en avait donné une construction et démonstration; Descartes le traita dans sa „Géométrie” et van Schooten dans ses commentaires sur cette „Géométrie”. Dans la pièce mentionnée Huygens arrive à une construction nouvelle; mais il préfère celle de Pappus dont il donne une démonstration différente ⁷³⁾. Une autre démonstration se trouve dans une lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 ⁷⁴⁾. C'est cette dernière qui a passé avec une modification légère dans le texte du „Probl. IV” de l'ouvrage présent.

⁶⁸⁾ Voir la Lettre N°. 641, p. 442—443 du T. II. Elle n'est pas de juillet 1659, comme nous l'avions supposé, mais de septembre ou octobre 1668, puisqu'elle se rapporte évidemment non à la première, mais à la seconde édition du Mesolabum, laquelle contient l'analyse des solutions, publiées dans la première, et traite dans les „Miscellanea” le problème de la détermination du point d'inflexion de la conchoïde.

⁶⁹⁾ On le trouve p. 227—228 du Manuscrit N°. 9 (olim E).

⁷⁰⁾ Il occupe les pages 7—15 du Manuscrit N°. 11.

⁷¹⁾ Voir la p. 199 du Tome présent.

⁷²⁾ Voir les p. 226—228 du T. XI.

⁷³⁾ Voir, pour plus de détails, les notes 2—6, p. 226—227 du T. XI.

⁷⁴⁾ Voir la p. 251 du T. I.

PROBL. V ⁷⁵⁾.

Soit donné un carré dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée, qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale du carré.

Nonobstant la ressemblance entre ce problème et celui qui précède, Huygens ne s'est occupé de celui-ci que quelques années plus tard. La première rédaction, que nous connaissons de la construction et démonstration, est celle de la pièce N^o. IV des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653” ⁷⁶⁾. Elle n'a subi que des modifications peu importantes dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 ⁷⁷⁾ et dans le texte de l'ouvrage présent. Probablement la construction, vu la grande ressemblance avec celle de Pappus du problème précédent, n'a pas été trouvée par l'analyse.

PROBL. VI ⁷⁸⁾.

Soit donné un losange dont l'un des côtés soit prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée, qui passe par le sommet opposé.

Le problème fut mentionné par Pappus, comme pouvant se résoudre par la règle et le compas, dans l'aperçu de l'ouvrage „De inclinationibus” d'Apollonius ⁷⁹⁾. Il n'en donne la solution que pour le cas particulier du „Probl. IV” précédent, où le losange est un carré.

Ghetaldi, dans son „Apollonius Redivivus, Seu Restituta Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria” ⁸⁰⁾ de 1607, traite le cas général, dont il trouva une solution assez élégante, en réduisant le problème à un autre mentionné également

⁷⁵⁾ Voir les p. 199—201 du Tome présent.

⁷⁶⁾ Voir les p. 19—20 du Tome présent.

⁷⁷⁾ Voir les p. 250—251 du T. I.

⁷⁸⁾ Voir les pp. 201—203 et 207—209 du Tome présent.

⁷⁹⁾ Voir la note 2 de la p. 239 du T. XI.

⁸⁰⁾ Voir les p. 17—19 de l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 5, p. 126 du T. VIII. La solution se retrouve encore dans le résumé de l'„Apollonius Redivivus” donné par Hérigone. Voir les p. 912—914 du Tome I du „Cursus mathematicus”, ouvrage cité dans la note 4, p. 202 du T. I et qui parut en 1634.

par Pappus⁸¹⁾ et résolu par Ghetaldi dans le même ouvrage. Il répéta cette solution dans l'ouvrage posthume „De Resolutione et Compositione Mathematica Libri Quinque”⁸²⁾, qui parut en 1640.

En 1650 Huygens, après s'être occupé du cas spécial du carré, prit en main le problème général. Guidé par une analyse semblable à celle qui lui avait réussi dans le cas spécial il trouva facilement une solution directe⁸³⁾, qu'il parvint ensuite à simplifier⁸⁴⁾.

Il reprit le même problème en 1652⁸⁵⁾ en le considérant cette fois comme cas particulier du problème de mener par un point une droite dont deux droites, données en position, découpent un segment de longueur donnée. Ce dernier problème amène en général une équation biquadratique, mais par le choix des données Huygens en fait disparaître les termes qui contiennent la troisième et la première puissance de l'inconnue. De cette manière il retrouve facilement le problème qui nous occupe et la nouvelle solution, à laquelle il arrive, se montre être plus simple et plus élégante que celle de l'année 1650. La démonstration, qu'il y ajoute, laisse à désirer; mais vers la fin il indique les moyens de l'améliorer⁸⁶⁾.

Le 19 octobre 1653⁸⁷⁾ il procède à une rédaction nouvelle, modifiant encore légèrement la construction et donnant à la démonstration la forme sous laquelle on la rencontre, sans altérations sensibles, dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653⁸⁸⁾ et dans le texte de l'ouvrage présent⁸⁹⁾.

En attendant il avait élaboré en août 1652⁹⁰⁾ une autre solution qui provient probablement d'un remaniement de la solution de 1650. Il la communiqua à van Schooten dans une lettre du 10 décembre 1653⁹¹⁾ et la publia dans l'ouvrage présent sous la suscription „Utrumque praecedentium Aliter”⁹²⁾.

⁸¹⁾ Le problème cité dans la note 2, p. 255 du T. XI. Consultez encore sur ce problème la note 3 de la même page.

⁸²⁾ Voir les p. 330—333 de l'ouvrage cité en dernier lieu dans la note 5, p. 127 du T. VIII.

⁸³⁾ Voir les p. 239—241 du T. XI.

⁸⁴⁾ Voir la „Constructio brevior” p. 241—242 du T. XI.

⁸⁵⁾ Voir la pièce N°. VI des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653”, p. 26—31 du Tome présent.

⁸⁶⁾ Voir la p. 31 du Tome présent.

⁸⁷⁾ Voir la note 10, p. 28 du Tome présent.

⁸⁸⁾ Voir les p. 247—248 du T. I.

⁸⁹⁾ Voir les p. 201—203, qui suivent.

⁹⁰⁾ Voir la pièce N°. XIII des „Travaux, etc.”, p. 57—58 du Tome présent.

⁹¹⁾ Voir la p. 256 du T. I.

⁹²⁾ Voir les p. 207—209, qui suivent.

PROBL. VII ⁹³).

Soit donné un losange dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale qui joint les deux autres sommets du losange.

Aux lieux cités plus haut Ghetaldi avait donné une solution de ce problème, comme du précédent ⁹⁴). Huygens s'en occupa pour la première fois le 11 février 1652 ⁹⁵), deux jours après qu'il avait trouvé la nouvelle solution du problème précédent. Il y appliqua une analyse analogue mais un peu simplifiée et ajouta une démonstration qu'il répéta le 19 octobre 1652 ⁹⁶) dans une forme plus achevée, sous laquelle on la retrouve avec des modifications légères dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 ⁹⁷) et dans le texte de l'ouvrage présent ⁹⁸). Cependant, à l'aide d'une analyse différente, il était arrivé le 17 février 1652 à une autre construction ⁹⁹), qu'il a considérée comme inférieure et qu'il n'a pas publiée. Une troisième construction, analogue à celle d'août 1652 du problème VI et qu'il avait élaborée le même jour, ¹⁰⁰) se retrouve sans modifications sensibles dans la lettre à van Schooten du 10 décembre 1653 ¹⁰¹) et dans le texte de l'ouvrage présent après l'en-tête „Utrumque praecequentium Aliter” et en second lieu ¹⁰²).

Jusqu'à quel point Huygens a-t-il failli la liaison intime qui existe entre les problèmes VI et VII, de manière que l'ensemble des racines de l'équation, amenée par l'analyse qui a pour but de résoudre l'un des problèmes, représente également les solutions de l'autre problème ?

En 1650 il ne s'occupe que du premier problème, le seul mentionné expressé-

⁹³) Voir les pp. 205—207 et 209—211, qui suivent.

⁹⁴) Voir les p. 19—22 de l'„Appolonius Redivivus”; les p. 913—914 du „Cursus mathematicus” d'Hérigone et les p. 333—336 de l'ouvrage: „De Resolutione et Compositione Mathematica”.

⁹⁵) Voir les p. 32—37 du Tome présent.

⁹⁶) Voir la note 16, p. 37 du Tome présent.

⁹⁷) Voir les p. 248—250 du T. I.

⁹⁸) Voir les p. 205—207, qui suivent.

⁹⁹) Voir les p. 42—44 du Tome présent.

¹⁰⁰) Voir la pièce N^o. XIII, p. 58—59 du Tome présent.

¹⁰¹) Voir les p. 256—257 du T. I.

¹⁰²) Voir les p. 209—211, qui suivent.

ment par Pappus ¹⁰³). De l'équation quadratique, à laquelle l'analyse l'a conduit, il néglige la racine qui aurait pu amener la solution du second problème ¹⁰⁴). Il agit de même en février 1652 avec les équations biquadratiques réductibles ¹⁰⁵) des pièces VI et VII des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653". Des quatre racines il n'en prend en considération que les deux qui se rapportent au problème qu'il s'est posé au début de la pièce.

Huygens a donc toujours traité les problèmes VI et VII (et de même les problèmes IV et V) comme des problèmes différents, nécessitant pour leur solution des analyses différentes. Toutefois l'expérience l'a convaincu de plus en plus de leur étroite analogie. Ainsi dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" il renvoie ¹⁰⁶) pour les constructions et les démonstrations des problèmes V et VII à celles des problèmes IV et VI, lesquelles on peut appliquer mot pour mot aux figures nouvelles. Ce n'est que la démonstration de la possibilité de la construction sous les conditions indiquées dans l'énoncé du problème, qui diffère; puisque, en effet, elle est bien plus simple dans ces derniers problèmes, qui, pour admettre des solutions réelles, n'exigent aucune limitation dans les données ¹⁰⁷).

PROBL. VIII ¹⁰⁸).

Trouver dans une conchoïde les limites de la courbure contraire.

En septembre 1653 Huygens élabora ¹⁰⁹), en se servant de la première des méthodes décrites à la p. 101 du présent „Avertissement", une solution universelle de ce problème, dans laquelle il employa les intersections d'un cercle et d'une parabole, et une autre solution, applicable entre certaines limites des données, à l'aide de la trisection de l'angle. Il mentionna ces solutions dans sa lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 ¹¹⁰). On les retrouve dans le texte de l'ouvrage présent.

En 1659 une autre solution, due à van Heuraet, fut publiée par van Schooten

¹⁰³) Voir la note 2, p. 239 du T. XI.

¹⁰⁴) Comparez les p. 240 et 241 du T. XI.

¹⁰⁵) Elles se trouvent aux pages 27 et 33 du Tome présent.

¹⁰⁶) Voir les pp. 201, 205 et 209, qui suivent.

¹⁰⁷) Comparez les énoncés des problèmes en question.

¹⁰⁸) Voir les p. 211—215, qui suivent.

¹⁰⁹) Voir la pièce XX, p. 83—86 du Tome présent.

¹¹⁰) Voir la p. 246 du T. I.

dans les commentaires qui accompagnent la seconde édition de la „Geometria” de Descartes ¹¹¹⁾.

Huygens la jugea supérieure à la sienne ¹¹²⁾ en ce que la détermination du point d'inflexion s'y accomplit, sans l'intervention d'une conique, à l'aide d'un cercle et de la conchoïde elle-même qu'on suppose tracée d'avance. Or, comme nous l'avons remarqué ailleurs ¹¹³⁾, Huygens préféra de beaucoup les constructions de cette façon aux autres. Il était même incliné à considérer les problèmes qui pouvaient être résolu de cette manière comme des problèmes plans ¹¹⁴⁾.

Toutefois la solution de van Heuraet laissa beaucoup à désirer au point de vue de la simplicité géométrique. Elle exigeait la construction de segments dont la longueur est déterminée par des formes algébriques assez compliquées. Huygens chercha à la simplifier et y réussit en août 1659. À l'aide de ses annotations nous avons pu reconstituer cette solution, qu'on trouvera dans l'„Appendice IV” ¹¹⁵⁾ de l'ouvrage présent. En la comparant avec celle de van Heuraet on s'aperçoit que l'artifice principal qui consiste dans la comparaison terme pour terme des deux équations cubiques après la multiplication des racines de l'une d'elles par un facteur indéterminé ¹¹⁶⁾, fut déjà employé par van Heuraet; mais que d'ailleurs la solution de ce dernier est bien plus longue et moins élégante que celle de Huygens.

En 1680 Huygens s'occupe de nouveau du même problème ¹¹⁷⁾. Enfin en 1687 il consulte ses anciennes annotations ¹¹⁸⁾ pour communiquer sa construction au sieur H. Coets ¹¹⁹⁾ et il reprend même pour un moment le fil de ses recherches. Cette fois il s'agit de la „determinatio” de la solution, c'est-à-dire, des limites entre lesquelles elle est applicable. Déjà en 1659 Huygens s'était aperçu

¹¹¹⁾ Voir les p. 258—262 de l'ouvrage cité.

¹¹²⁾ Voir sa lettre à de Sluse, p. 443 du T. II; mais consultez sur cette lettre la note 68. Voir encore la lettre à Coets du 27 août 1687, p. 200 du Tome IX.

¹¹³⁾ Voir la p. 7 du Tome présent.

¹¹⁴⁾ Van Schooten évidemment était du même avis puisqu'au lieu cité plus haut il s'exprime comme il suit à propos de la solution de van Heuraet: „sic ut ad constructionem ejus non nisi regula atque circino utamur, haud secus ac si Problema foret Planum” (p. 259).

¹¹⁵⁾ Voir les p. 232—237, qui suivent.

¹¹⁶⁾ Voir, aux pp. 232 et 234, qui suivent, les notes 4 et 11 de l'Appendice mentionné.

¹¹⁷⁾ Voir la note 15 de l'Appendice IV, p. 236, qui suit.

¹¹⁸⁾ Celles que nous avons utilisées dans l'Appendice IV.

¹¹⁹⁾ Voir les p. 200—201 du T. IX.

que la construction n'était pas toujours exécutable et il avait même indiqué la limite de sa validité ¹²⁰⁾; mais il n'avait pas encore recherché si celle de van Heuraet est sujette au même inconvénient. A cet effet il examine maintenant deux cas extrêmes et s'affûre que dans ces cas elle est réalisable. Sans s'arrêter au cas général, difficile à traiter, il en conclut que la construction de van Heuraet „pour le point de la courbure de la conchoïde peut s'éviter toujours” ¹²¹⁾.

¹²⁰⁾ Voir, dans le volume présent, la note 16 de l'Appendice IV. C'est donc à tort que dans le dernier alinéa de la note 4, p. 202 du T. IX, il a été supposé que cette question des limites de la validité de la construction ne s'est pas présentée à l'esprit de Huygens avant 1687. Une inspection plus minutieuse des annotations de 1659, très difficiles à déchiffrer, nous a mieux renseigné.

¹²¹⁾ Consultez encore le dernier alinéa de la note 4, p. 202 du T. IX.

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.
D E
C I R C U L I
MAGNITUDE
INVENTA.

ACCEDVNT EIVSDEM
Problematum quorundam illustrium
Constructiones.



LVGDVNI BATAVORVM,
Apud JOHANNEM & DANIELEM ELZEVIER.
Academ. Typograph.
c15 l3c liv.

PRÉFACE.

Estimant nous avoir occupé récemment avec quelque succès de l'antique problème de la quadrature du cercle, le plus célèbre de tous aux yeux même de ceux qui n'entendent pas les Mathématiques, et ayant obtenu quelques choses meilleures, à ce que nous croyons, que ce qui a été trouvé jusqu'ici, nous les voulons communiquer aux Géomètres avec leurs démonstrations. Car nous jugeons que non seulement elles feront utiles à leurs études, mais aussi que, par leur nouveauté même, elles serviront d'aiguillon à la recherche de choses cachées pour ceux qui considéreront que même sur un champ, où tous ont travaillé depuis longtemps avec le plus grand effort, il restait encore à conquérir à la diligence des prix de quelque valeur. Plusieurs, il est vrai, ont tâché précédemment de s'attribuer la gloire de l'invention de la Quadrature et ont produit de temps en temps diverses réflexions où le vrai et le faux se trouvaient mêlés. Mais nous savons que toutes ces choses ont été ou renversées ou méprisées par de plus compétents et que jusqu'ici, de tout ce qui pourrait servir de base pour trouver la dimension du cercle, rien n'a été accepté que cette seule vérité, que le cercle est plus grand que le polygone qui lui est inscrit et plus petit que le polygone circonscrit. Mais nous, nous énonçons une détermination plus approchée et démontrons, que *si l'on prend deux polygones, moyens proportionnels entre l'inscrit et le circonscrit et qui leur sont semblables, le périmètre du plus petit d'entr'eux est plus grand que la circonférence du cercle, et que l'autre polygone excède l'aire du cercle dans la même proportion* ¹⁾. Et quoique parmi les propositions que nous allons démontrer celle-ci paraîsse la plus difficile et particulièrement digne de contemplation, il y en a cependant d'autres, qui non seulement sont plus précises ²⁾, mais qui dans leur usage se montreront plus propres; lesquelles toutefois nous ne passerons pas en revue dans cette préface, parce que dans la suite elles pourront être mieux comprises. Mais il pourra être à propos d'exposer brièvement ce qu'elles contribuent à l'étude de la Géométrie, parce qu'elles se recommandent par leur utilité non négligeable. Ainsi donc, comme nous avons institué une double manière de traiter notre sujet, d'abord en donnant ce dont la démonstration est comprise dans les éléments ordinaires de la Géométrie, ensuite en employant aussi la considération

PRÆFATIO.

Circa antiquum Tetragonismi problema, quo vel apud Mathematicum ignaros nihil est celebrius, recens opere pretium nos fecisse rati, & quedam hæcenus compertis meliora ut putamus consecuti, Geometris ea demonstrata impertiri volumus. Namque & studiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipsâ ad rerum abditarum investigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem summa contentione versati sint, aliqua superfuisse hæud indigna diligentie præmia. Plurimi quidem antehac invente Quadraturæ gloriam sibi asserere conati sunt, variæque subinde commenta protulere, falsis vera miscentes. Verum à peritioribus omnia vel eversa fuisse vel contempta scimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimensio niteretur, præter unum illud, majorem esse eum inscripto sibi polygono, circumscripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus ostendimusque, quod duobus sumptis polygonis proportionem mediis inter inscriptum circumscriptumque ipsis simile, minoris eorum perimetre circumferentiâ circuli major exsistit, reliquum vero polygonum eâdem proportionem circuli aream exuperat¹⁾. Et hoc quidem ut inter ea que demonstraturi sumus & difficillimum & contemplatione præcipue dignum videatur, alia tamen sunt non accuratioris modî²⁾, sed que & usu magis probentur; que sævè hic in antecessum non recensebimus, quippe in sequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid studiis Geometriæ conferant exposuisse proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propositi tractationem instituerimus, primum ea tradendo quorum demonstratio consuetis Geometriæ elementis contenta est, deinde centrorum gravitatis quoque considerationem adhibendo:

¹⁾ Voir le „Theor. XI. Prop. XIV”, p. 151 du Tome présent. Il est vrai que, dans l'énoncé du théorème cité, on ne trouve pas indiqué l'égalité des deux proportions, c'est-à-dire, du rapport du périmètre du moindre des deux polygones à la circonférence du cercle et de celui de l'aire du plus grand à celle du cercle; toutefois cette égalité est exprimée plus loin, vers la fin de la démonstration (p. 155), par la phrase: „Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circumulum BD sicut X ad circumferentiâ BD”.

²⁾ Comparez les notes 13 et 17 aux pp. 96 et 97 du Tome présent.

des centres de gravité: on trouvera dans la première partie expliqué comment on peut construire non seulement une droite égale à la circonférence entière ³⁾ mais aussi celle qui est égale à un arc donné quelconque ⁴⁾, en ramenant la solution à des constructions mécaniques, de manière qu'elle ne se trouve en défaut même dans les plus subtiles de ces constructions. Comment aussi le rapport de la périphérie au diamètre, qu'Archimède déduisit des polygones de 96 côtés, peut être vérifié par les calculateurs au moyen du dodécagone seulement ⁵⁾. Mais tandis que ceux qui suivent l'ancienne voie trouveront par le polygone de 10800 côtés à peine les limites 62831852 et 62831855 parties dont le diamètre en contient 20000000, ils verront que par notre Méthode il vient 6283185307179584, 6283185307179589 ⁶⁾; et que l'on obtient toujours le nombre double de chiffres vrais, quel que soit le nombre de côtés du polygone employé. Et nous avons reconnu que cela est ainsi pour une raison certaine ⁷⁾ de même aussi que le carré d'un nombre quelconque se compose ordinairement d'un nombre de chiffres double de celui de la racine. Mais une propriété des centres de gravité rend le calcul encore plus compendieux, et par elle nous semblons en quelque sorte avoir approché plus près à la perfection de ce problème irrésoluble. En effet, pour établir les limites de la périphérie, obtenues par Archimède, nous n'avons besoin que de connaître le côté du triangle inscrit ⁸⁾. Mais du polygone de soixante côtés nous démontrons ⁹⁾ qu'elle est contenue entre 31415926538 et 31415926533, en attribuant au diamètre 10000000000 parties, tandis que la méthode usuelle produit à peine les nombres 3145 et 3140. De manière que le nombre de chiffres vrais est maintenant le triple et plus, de même que le double par la méthode précédente; et cela continue ainsi toujours, tout comme on remarque que dans les grands nombres le cube contient trois fois autant de chiffres que la racine ¹⁰⁾. De sorte que si dorénavant il y en a qui définissent faussement la grandeur de la circonférence du cercle, ils ne seront plus réfutés par des polygones à côtés nombreux, mais par un calcul bref et nullement compliqué, qu'ils ne pourront plus facilement accuser d'erreur, comme ils l'ont presque habitué jusqu'ici. De plus, si dans la Table des cordes, dont chacun fait combien il importe qu'elle soit corrigée, des erreurs ont été faites pendant la composition ou se sont glissées venant d'ailleurs, il ne sera pas difficile de les corriger au moyen de notre méthode, puisque maintenant on peut trouver d'une autre manière au moyen des inscrites dans le cercle, la longueur des arcs souffendus. Et même à ceux qui manquent de tout aide des Tables nous montrons de quelle manière ils peuvent déduire des côtés donnés les angles des triangles ¹¹⁾, de façon que l'écart de la valeur vraie ne soit jamais de deux secondes, et souvent même pas d'une tierce. Et nous avons la confiance que cela sera considéré comme

³⁾ Voir le „Problema II. Prop. XI”, p. 143 du Tome présent.

⁴⁾ Voir le „Problema III. Prop. XII”, p. 147.

in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentie toti ⁵⁾, sed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda sit ⁶⁾; expedità ratione ad Mechanicas construcciones, quæque vel subtilissimas earum minime frustretur. Quomodo item numeros excercitibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum 96 eruit, per dodecagona sola comprobari queat ⁷⁾. Ex polygonis autem laterum 10800, cum iis qui veterem insunt viam vix hî peripheriæ termini existant 62831852 & 62831855, ad diametrum partium 20000000, nostrâ Methodo isti prodiiisse cernuntur, 6283185307179584, 6283185307179589 ⁸⁾; semperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygoni adhibeantur. Quod quidem certè ratione contingere ⁹⁾ perspeximus sicuti & quadratum cuiusque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque constituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietates subministrat, & propius quodammodo ad perfectionem insuperabilis problematis per hæc accessisse videmur. Certè ad Archimedeos peripheriæ limites constituendos, solo nunc inscripti trigoni cognito latere indigemus ¹⁰⁾. E sexagintangulo autem inter hosce eam contineri probamus ¹¹⁾ 31415926538 & 31415926533, posita diametro partium 1000000000, cum solita methodo vix isti producantur 3145, 3140. Adeo ut triplus jam & ultra sit verarum hic notarum numerus, sicut per præcedentia duplex; & perpetuo quidem successu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum sui lateris triplum esse animadvertitur ¹²⁾. Ergo posthac si qui falsò circumferentie magnitudinem desinient, per numerosa polygoni non refutabuntur, sed calculo brevi minimeque intricato, quemque erroris insimulare, quod hæcenus ferè soliti sunt, haud facile possint. Ad hæc si quid in subtensarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes sciunt, in eo contexendo si quid erit admissum aut aliunde perversum irrepserit, non difficile erit horum ope restituere, cum aliud nunc ratione ex inscriptis in circulo longitudinem arcuum quibus subtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio destitutis ostendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum investigare queant ¹³⁾, ut nunquam duorum secundorum scrupulorum sit à vero dissensus, sepe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda visum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum

⁵⁾ Comparez le „Problema I. Prop. X”, p. 139.

⁶⁾ Comparez la dernière partie (p. 143) de la proposition citée dans la note précédente.

⁷⁾ Voir la note 15, p. 142 du Tome présent.

⁸⁾ Comparez les p. 173—177 du Tome présent.

⁹⁾ Comparez la p. 179.

¹⁰⁾ Le sujet n'est pas traité expressément dans l'ouvrage présent; mais on peut le rattacher facilement au dernier alinéa de la page 179. En effet, par le calcul de la hauteur du triangle on trouve aisément la corde qui appartient au double de chacun de ses angles; ensuite cet alinéa apprend à déterminer les arcs soutendus par ces cordes, d'où l'on peut déduire, en se servant du nombre π , les grandeurs des angles cherchés. Voir encore le dernier alinéa, p. 163 de la démonstration du „Theorema XIII”, où sont mentionnés les travaux de Snellius sur ce même sujet.

un avantage non léger. Mais nous avons reconnu que René Descartes, dont les inventions ont illustré non seulement la Philosophie universelle mais surtout les Mathématiques, a mis par écrit quelques choses qui se rapportent à ce sujet ¹¹⁾. On dit qu'après sa mort elles ont été trouvées dans ses notices, et jusqu'ici nous n'avons pu savoir par quelle méthode et avec quel succès il y a mis la main. Mais de Willebrord Snellius, le savant géomètre, nous avons le *Cyclometricus* ¹²⁾, écrit laborieux et entièrement consacré à cette matière. Et il aurait paru mériter de grandes louanges, s'il eût pu démontrer les deux théorèmes principaux ¹³⁾ sur lesquels, comme sur des fondements, tout cet ouvrage est construit. Mais ce qu'il y veut avoir admis comme démonstrations ne prouve nullement ce qui est proposé: toutefois ces deux théorèmes, comme nous le montrerons d'une manière évidente pour chacun d'eux, contiennent une vérité importante. Et nous avons jugé qu'ils devraient être inférés à bon droit dans ce qui suit, parce que leurs causes dépendent de nos inventions.



¹¹⁾ Sous la date du 31 déc. 1653, Constantijn Huygens, père, écrivit à la Princesse Élisabeth: „Monsieur Chanut, qui possède tous les papiers du défunct [M. Descartes], & prétend d'en faire imprimer quelques Lettres d'eslite, desire feuilleter le tout avecq mond^e Archimede pour veoir ce qu'il y a encor de Philosophie ou de Mathematique, dont on pourroit faire part au public, n'y ayant point de brouillon de ceste merueilleuse main, à mon aduis, qui ne le merite”.

Or, Chanut, qui avait recueilli ces papiers à Stockholm lors du décès de Descartes, était alors ambassadeur de France à la Haye. Mais il semble qu'il n'a pas donné suite à son intention de les montrer à Christiaan Huygens avant de les envoyer en France, où il les confia aux soins de Clerselier.

Toutefois Christiaan Huygens a pu prendre connaissance de l'inventaire, dressé à Stockholm, des manuscrits de Descartes, dont une copie était dans la possession de son père. On y lit sous la lettre B:

„Un Registre relié, & couvert de parchemin, Le second feuillet porte en teste: Ex quantitate linearum, quae in dato circulo inscriptae sunt, quantitatem circumferentiae, cui datae lineae subtenduntur, cognoscere”.

La pièce qui avait ce titre fut publiée en 1701 dans l'ouvrage: „R. Des-Cartes Opuscula

*Cartesium, cujus viri inventis cum Philosophia universa tum Mathesis plurimum illustrata est, nonnulla quæ huc spectent scriptis mandasse*¹¹⁾. *Ea verò defuncto ipso in commentariis reperta seruntur, neque adhuc rescire possumus quid industria aut eventu hisce manum admovent. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclo-metricus*¹²⁾ *extat, multo labore conscriptus, quique omnis in his est. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, si præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis superstructum est, demonstrare potuisset*¹³⁾. *Sed quas ibi pro demonstrationibus haberi postulat, propositum minime comprobant: ipsa verò theoremata, sicut in utroque evidenti ratione nos ostendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem sequentibus merito inferenda putavimus, quod causæ eorum à nostris pendeant inventis.*

posthuma, physica & mathematica. Amstelodami, ex typographiâ P. & J. Blaeu, MDCCI". On la trouve dans l'édition récente des „Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery aux pages 285—289 du T. X.

Elle contient un tableau des valeurs irrationnelles des cordes dérivant des côtés du carré, du triangle équilatéral, du pentagone et du pentadécagone réguliers.

En outre, on trouve dans cette même publication de 1701 un article, qui donne, sous la suscription: „Circuli quadratio", une construction ingénieuse par laquelle on peut approcher indéfiniment à la longueur du diamètre d'un cercle dont la circonférence est donnée; voir les p. 304—305 du T. X de l'édition d'Adam et Tannery.

Pour plus de détails on peut encore consulter de cette même édition les pp. 1—5, 279—284 du T. X.

¹¹⁾ Consultez, sur Snellius et sur l'ouvrage cité, les notes 5 et 6, p. 94 du Tome présent.

¹²⁾ Voir, sur ces théorèmes, la note 8, p. 95 du Tome présent et les pp. 157 et 159 du même Tome.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.

SUR

L'INVENTION DE LA GRANDEUR DU CERCLE.

THEORÈME I. PROPOSITION I.

Si dans un segment de cercle, moindre que la moitié du cercle¹⁾, on inscrit le plus grand triangle possible, et parcelllement des triangles dans les segments restants, le triangle décrit en premier lieu sera moindre que le quadruple de la somme des deux décrits dans les segments restants.

Soit ABC le segment de cercle, moindre que la moitié du cercle¹⁾, dont le diamètre est BD, et le plus grand triangle inscrit ABC, c'est-à-dire ayant la même base et la même hauteur que le segment. Et soient inscrits de même dans les segments restants les plus grands triangles possibles AEB, BFC. Je dis que le triangle ABC est moindre que le quadruple de la somme des deux triangles AEB, BFC. Tirons la droite EF, qui coupe le diamètre du segment en G. Puis donc que l'arc AB est divisé en deux parties égales au point E, EA et EB seront chacune plus grande que la moitié de AB. Par suite le carré de AB fera moindre que le quadruple du carré de EB ou de EA. Mais, comme le carré de AB est au carré de EB, ainsi est la longueur de DB à celle de BG, parce que le carré de AB est égal au rectangle construit sur DB et le diamètre du cercle entier, et le carré de EB égal au rectangle construit sur le même diamètre et la droite BG. BD est donc moindre que le quadruple de BG. Mais AC est également moindre que le double de EF parce que celle-ci est égale à AB. Il paraît donc que le triangle ABC est moindre que l'octuple du triangle EBF. Mais à ce dernier triangle est égal chacun des deux AEB, BFC. Par conséquent ABC fera moindre que le quadruple de la somme de ces deux derniers triangles. Ce qu'il fallait démontrer.

¹⁾ Voir les „Errata”, p. 215; mais la restriction n'est pas nécessaire, le théorème et la démonstration restant valables dans le cas où le segment excède un demi-cercle.

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

DE

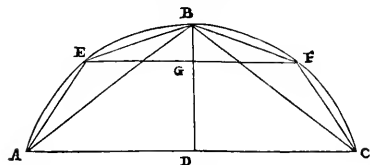
CIRCULI MAGNITUDE

INVENTA.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si Circuli portio semicirculo minori ¹⁾, triangulum maximum inscribatur, & portionibus reliquis triangula similiter inscribantur, erit triangulum primo descriptum duorum simul quæ in portionibus reliquis descripta sunt minus quam quadruplum.

Estō circuli portio ABC semicirculo minor ¹⁾, ejus diameter BD; maximum autem inscriptum sit triangulum ABC, hoc est, quod basin & altitudinem habeat



[Fig. 1.]

cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inscribantur triangula item maxima AEB, BFC. Dico triangulum ABC minus esse quam quadruplum triangulorum AEB, BFC simul sumptorum. Jungatur enim EF, quæ secet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus AB bifariam dividitur in E puncto, erit utraque

harum EA, EB, major dimidiâ AB. Quamobrem quadratum AB minus erit quam quadruplum quadrati EB vel EA. Sicut autem quadratum AB ad quadr. EB, ita est DB ad BG longitudine; quia quadratum quidem AB æquale est rectangulo quod à DB & circuli totius diametro continetur, quadratum verò EB æquale rectangulo sub eadem diametro & recta BG. Minor igitur est BD quam quadrupla BG. Sed & AC minor est quam dupla EF, quoniam hæc ipsi AB æquatur. Ergo patet triangulum ABC minus esse quam octuplum trianguli EBF. Huic autem triangulo æquantur singula AEB, BFC. Ergo utriusque simul triangulum ABC minus erit quam quadruplum. Quod erat ostendendum.

THÉOR. II. PROP. II.

Soient donnés un segment moindre que la moitié du cercle, et sur sa base un triangle dont les côtés sont tangents au segment; soit tirée de plus une droite tangente au segment dans son sommet: cette droite coupera du triangle nommé un triangle plus grand que la moitié du plus grand triangle que l'on puisse inscrire dans le segment.

Soit ABC le segment de cercle, moindre qu'un demi-cercle, B son sommet. Et AE, CE les deux tangentes aux extrémités de la base, lesquelles se rencontrent en E; elles se rencontreront parce que le segment est moindre qu'un demi-cercle. Soit tirée de plus FG, tangente au sommet B et joignons AB, BC. Il faut donc montrer que le triangle FEG est plus grand que la moitié du triangle ABC. Il est certain que les triangles AEC, FEG, de même que AFB, BGC sont isocèles et que FG est divisée par B en deux parties égales. Or, la somme de FE et EG est plus grande que FG; donc EF est plus grande que FB, ou plus grande que FA. La droite entière AE est donc moindre que le double de FE. Par conséquent le triangle FEG sera plus grand que le quart du triangle AEC. Mais comme FA à AE, ainsi est la hauteur du triangle ABC à la hauteur du triangle AEC et la base de ces deux triangles est la même AC. Donc, comme FA est moindre que la moitié de AE, le triangle ABC fera moindre que la moitié du triangle AEC. Mais le triangle FEG était plus grand que le quart du triangle AEC. Donc le triangle FEG est plus grand que la moitié du triangle ABC. Ce qu'il fallait démontrer.

THÉOR. III. PROP. III.

Tout segment de cercle, moindre que la moitié du cercle¹⁾ est au plus grand triangle inscrit dans un rapport plus grand que quatre à trois.

Soit un segment de cercle [Fig. 3], moindre qu'un demi-cercle¹⁾, dans lequel est inscrit le plus grand triangle possible ABC. Je dis que ce segment est au dit triangle dans un rapport plus grand que quatre à trois. Inscrivons, en effet, dans les deux segments restants les triangles les plus grands ADB, BEC. Le triangle

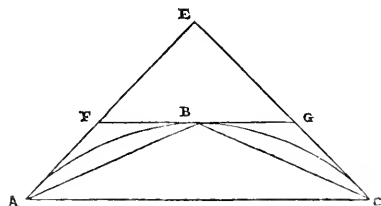
* d'après 1. ici.

ABC est ainsi plus petit que le quadruple de ceux-ci ensemble*: et pour cette raison on peut ajouter au triangle ABC un certain espace, qui, joint à lui, soit encore plus petit que le quadruple de la somme des triangles ADB, BEC. Soit donc ajouté

THEOR. II. PROP. II.

Si fuerit circuli portio semicirculo minor, & super eadem basi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hec à triangulo dicto triangulum abscindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem descripti.

Est circuli portio semicirculo minor ABC, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos basis rectæ AE, CE, quæ convenient in E: convenient enim quia portio semicirculo minor est.



[Fig. 2.]

Porro ducatur FG, quæ contingat ipsam in vertice B; & jungantur AB, BC. Ostendendum est itaque, triangulum FEG majus esse dimidio trianguli ABC. Constat triangula AEC, FEG, item AFB, BGC æquicruria esse, dividique FG ad B bifariam. Utraque autem simul FE, EG, major est quam FG; ergo EF major quam FB, vel quam FA. Tota igitur AE

minor quam dupla FE. Quare triangulum FEG majus erit quarta parte trianguli AEC. Sicut autem FA ad AE, ita est altitudo trianguli ABC ad altitudinem trianguli AEC, & basis utrique eadem AC. Ergo, quum FA sit minor quam subdupla totius AE, erit triangulum ABC minus dimidio triangulo AEC. Hujus verò quarta parte majus erat triangulum FEG. Ergo triangulum FEG majus dimidio trianguli ABC. Quod ostendendum fuit.

THEOR. III. PROP. III.

Omnis circuli portio semicirculo minor¹⁾, ad maximum triangulum inscriptum majorem rationem habet quam sesquiterciam.

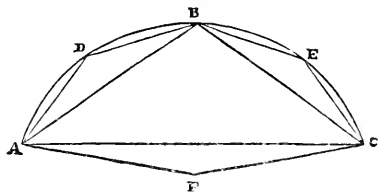
Est Circuli portio [Fig. 3] semicirculo minor¹⁾, cui maximum sit inscriptum triangulum ABC. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inscribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula ADB, BEC. Itaque minus est triangulum ABC quam illorum simul quadruplum*; ac proinde spatium aliquod adjungi potest triangulo ABC, quod una cum * per 1. huj.

pour ce motif le triangle AFC, tel que tout l'espace ABCF soit moindre que le quadruple des triangles ADB, BEC. Et figurons nous qu' ensuite des triangles maxima soient inscrits dans les segments restants; et ainsi toujours dans les segments restants, jusqu' à ce que les segments dans lesquels on a inscrit en dernier lieu soient ensemble plus petits que le triangle ACF, car cela peut se faire ²⁾). Ainsi aussi les triangles inscrits en dernier lieu seront ensemble moindres que le triangle ACF. Mais puisque les deux triangles ADB, BEC sont ensemble plus grands que la quatrième partie de l'espace ABCF. Et que de nouveau les quatre triangles, qui sont inscrits dans les segments restants, sont plus grands que la quatrième partie de ceux-là. Et de même plus grands que leur quart, ceux qui sont inscrits ensuite; et ainsi continuellement, s'il y en a plusieurs qui sont décrits. En conséquence l'espace composé du quadrilatère ABCF et des autres triangles inscrits, et du tiers de ceux qui seront inscrits en dernier lieu, sera plus grand que les quatre tiers de ce quadrilatère ABCF. Car il a été démontré par Archimède ³⁾ que si l'on a un nombre quelconque d'espaces, qui sont en raison quadruple, l'ensemble de tous avec le tiers du plus petit est au plus grand dans le rapport de quatre à trois. Ainsi, par partage, tous les triangles décrits dans les segments ADB, BEC, avec le tiers de ceux décrits en dernier lieu, seront plus grands que la troisième partie de l'espace ABCF. Mais le tiers susdit est moindre que le tiers du triangle ACF. Par suite, enlevant d'un côté le tiers des triangles décrits en dernier lieu; et retranchant d'autre part de l'espace ABCF le triangle AFC, tous les triangles décrits dans les segments ADB, BEC seront ^{*)} plus grands que le tiers du triangle ABC *. Donc, par composition, toute la figure rectiligne inscrite dans le segment ABC est plus grande que les quatre tiers du triangle ABC, et à plus forte raison le segment lui-même. Ce qu'il fallait démontrer.

²⁾ On peut consulter à cet égard la démonstration de la Prop. 2 du Livre 12 des „Elementa” d'Euclide.

³⁾ Voici la Prop. 23 de son ouvrage „Quadratura parabolae”: „Si magnitudines quotcunque consequenter in proportionem quadrupla disponantur, hac magnitudines simul omnes cum

Esto itaque eâ ratione adjectum triangulum AFC, ut totum spatium ABCF minus sit quam quadruplum triangulorum ADB, BEC. Et porro in residuis portionibus maxima triangula inscribi intelligantur; itemque in residuis semper, donec portiones quibus postremum inscribentur simul minores sint triangulo ACF, hoc enim fieri potest ²⁾. Itaque & triangula postremum inscripta simul triangulo ACF minora erunt. Quia autem spatii ABCF quarta parte majora sunt duo



[Fig. 3.]

simul triangula ADB, BEC. Rursumque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inscribuntur. Et horum quartâ majora similiter, quæ deinceps: atque ita continuè, si plura fuerint descripta. Erit propterea spatium ex quadrilatero ABCF & cæteris inscriptis triangulis, & triente eorum, quæ postremo inscripta erunt, compositum, majus

quam sesquitergium ipsius quadrilateri ABCF. Hoc enim ab Archimede demonstratum est ³⁾, quod si fuerint spatia quotcumque in ratione quadrupla, ea omnia simul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt sesquitergiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones ADB, BEC descripta cum triente postremo descriptorum majora erunt tertia parte spatii ABCF. Sed triens dictus minor est triente trianguli ACF. Igitur dempto illinc triente postremo inscriptorum; à spatio autem ABCF ablato triangulo AFC, erunt triangula omnia intra portiones ADB, BEC descripta, majora triente trianguli ABC*. Quare * 33.5. *Elem.* ⁴⁾ componendo, tota figura rectilinea portioni ABC inscripta major quam sesquitergia trianguli ABC, multoque magis portio ipsa. Quod erat demonstrandum.

tertia parte minimæ illarum, sunt sesquitergiae magnitudini illarum maximæ"; p. 154 de l'édition de Basle (Heiberg, T. II, p. 347).

Voir sur ces éditions des Œuvres d'Archimède la note 3, p. 274 du Tome XI.

⁴⁾ „Si fuerit maior proportio totius ad totum. quam ablati ad ablatum: Erit & reliquum maior proportio. quam totius ad totum". Voir p. 526 de l'édition, citée dans la note 10, p. 97 du T. XI, des „Elementa" d'Euclide, par Clavius.

THÉOR. IV. PROP. IV.

Tout segment de cercle, plus petit que la moitié du cercle, est moindre que les deux tiers du triangle qui a la même base et dont les côtés touchent le segment.

Soit donné un segment de cercle, moindre que le demi-cercle, ABC, et supposons qu'il soit touché aux extrémités de la base par les droites AD, CD, qui se rencontrent au point D. Je dis que le segment ABC est moindre que les deux tiers du triangle ADC. Menons en effet EF, qui touche le segment au sommet B, et inscrivons le triangle maximum ABC. Comme alors le triangle EDF est plus grand que la moitié du triangle ABC*, il est évident que l'on peut découper de celui-là une partie telle, que le reste soit pourtant encore plus grand que la moitié du dit triangle ABC. Soit donc découpé, conformément à cela, le triangle EDG. Et menons ensuite les droites HI, KL, qui touchent les segments restants AMB, BNC en leurs sommets, et inscrivons dans ces mêmes segments les triangles les plus grands. Et figurons-nous ensuite que la même chose soit faite sur les segments restants, jusqu'à ce qu'enfin les segments restants soient ensemble plus petites que le double du triangle EDG. Il y aura donc alors une certaine figure rectiligne inscrite dans le segment et une autre qui lui est circonscrite. Et puisque le triangle EGF est plus grand que la moitié du triangle ABC, et qu'à leur tour les triangles HEI, KFL sont plus grands que les moitiés des triangles AMB, BNC; et que cela a lieu pour le même motif pour les autres segments, savoir, que les triangles construits au-dessus des sommets des segments sont plus grands que les moitiés de ceux qui sont décrits dans les segments mêmes: il est clair que tous les triangles situés en dehors du segment, même sans le triangle EGD, sont ensemble plus grands que les moitiés de tous les triangles décrits dans les segments. Mais le triangle EGD est aussi plus grand que la moitié des segments restants mentionnés. Par conséquent le triangle EDF, avec les autres triangles qui sont en dehors du segment, sera plus grand que la moitié de tout le segment ABC. Donc à plus forte raison l'espace compris entre les droites AD, DC et l'arc ABC sera plus grand que la moitié du segment ABC. Et ainsi le triangle ADC est plus grand que une et demie fois le segment ABC. Ce qu'il fallait démontrer.

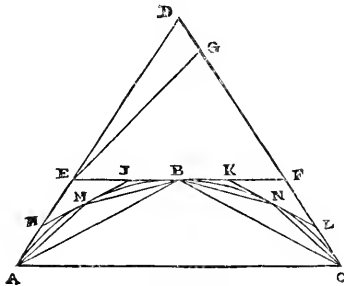
* d'après 2. ici.

THEOR. IV. PROP. IV.

Omnis circuli portio semicirculo minor, minor est duabus tertiis trianguli eandem cum ipsa basin habentis, & latera portionem contingentia.

Esto circuli portio semicirculo minor ABC, & contingant ipsam ad terminos basis rectæ AD, CD, quæ convenient in puncto D. Dico Portionem ABC minorem esse duabus tertiis trianguli ADC. Ducatur enim EF quæ portionem contingat in vertice B, & inscribatur ipsi triangulum maximum ABC. Quum igitur triangulum EDF majus sit dimidio trianguli ABC*, manifestum est ab illo partem abscindi posse, ita ut reliquum tamen majus sit dimidio dicti ABC trianguli. Sit igitur hoc pacto abscissum triangulum EDG. Et ducantur porro rectæ HI, KL, quæ portiones reliquas AMB, BNC in verticibus suis contingant, ipsisque portio-

*per 2. luj.



[Fig. 4.]

nibus triangula maxima inscribantur. Idemque prorsus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones residuæ simul minores sint quam duplum trianguli EDG. Erit igitur inscripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumscripta. Et quoniam triangulum EGF majus est dimidio trianguli ABC; & rursus triangula HEI, KFL, majora quam dimidiatriangulorum AMB, BNC; idque eadem semper ratione in reliquis locum habet, ut triangula super portionem verticibus constituta, eorum quæ intra portiones ipsas descripta sunt, majora sint quam subdupla: apparet triangula omnia extra portionem posita etiam absque triangulo EGD majora simul esse quam dimidia triangulorum omnium intra portionem descriptorum. Atqui segmentorum in portione reliquorum triangulum quoque EGD majus est quam subduplum. Ergo triangulum EDF simul cum reliquis triangulis, quæ sunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius ABC. Quare multo magis spatium à rectis AD, DC & arcu ABC comprehensum majus erit portionis ABC dimidio. Ac proinde triangulum ADC majus quam portionis ABC sesquialterum. Quod erat demonstrandum.

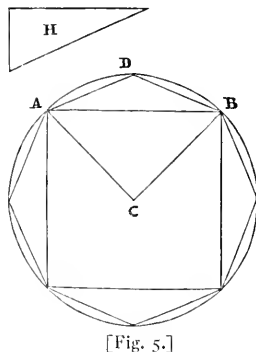
THÉOR. V. PROP. V.

Tout cercle est plus grand qu'un polygone à côtés égaux, qui lui est inscrit, plus le tiers de la quantité dont ce polygone en surpasse un autre polygone inscrit d'un nombre de côtés réduit à la moitié⁵⁾.

Soit un cercle à centre C; et que lui soit inscrit un polygone équilatéral, dont un des côtés soit AB. Et soit inscrit de même un autre polygone, dont AB sous-tend les deux côtés AD, DB. Ce dernier polygone est alors plus grand que le premier. Supposons que le tiers de l'excès soit égal à l'espace H. Je dis que le cercle est plus grand que le polygone ADB avec l'espace H. Traçons en effet à partir du centre les droites CA, CB. Comme alors le segment de cercle ADB est plus grand que les quatre tiers du triangle ADB qui lui est inscrit*, les segments AD, DB feront ensemble plus grands que le tiers du triangle ADB. Pour cette raison aussi le secteur CAB sera plus grand que la somme du quadrilatère CADB et du tiers du triangle ADB. Mais,

comme le secteur CAB au cercle entier, ainsi le quadrilatère CDBA est au polygone ADB, et ainsi aussi le tiers du triangle ADB au tiers de l'excès du polygone ADB sur le polygone AB. Il est donc clair qu' aussi tout le cercle est plus grand que le polygone ADB augmenté du tiers de la quantité dont le polygone ADB surpasse le polygone AB, c'est-à-dire augmenté de l'espace H. Ce qu'il fallait démontrer.

* d'après 3, ici.



[Fig. 5.]

⁵⁾ Soit donc s_n l'aire du polygone à n côtés, inscrit dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité; on a alors d'après le théorème présent:

$$\pi > s_{2n} + \frac{1}{3} (s_{2n} - s_n).$$

Introduisant ensuite, au lieu des aires des polygones leurs périmètres p , on trouve à l'aide de la relation $s_{2n} = \frac{1}{2} p_n$, la formule:

$$2\pi > p_{2n} + \frac{1}{3} (p_{2n} - p_n),$$

THEOR. V. PROP. V.

Omnis circulus major est polygono æqualium laterum sibi inscripto & triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero ⁵⁾.

Esto circulus centro C [Fig. 5]; sitque ipsi inscriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum sit AB. Atque alterum item polygonum sit inscriptum, cujus bina latera AD, DB, subtendat AB. Hoc igitur priore polygono majus est. Sit autem excessus trienti æquale II spatium. Dico circulum majorem esse polygono ADB una cum spatio H. Ducantur enim ex centro rectæ CA, CB. Quoniam igitur portio circuli ADB major est quam sesquitertia trianguli ADB sibi inscripti*; erunt portiones AD, DB, simul majores triente trianguli ADB. Quamobrem & sector CAB major erit utrique simul quadrilatero CADB & triente trianguli ADB. Sicut autem sector CAB ad circulum totum, ita est quadrilaterum CDAB ad polygonum ADB, & ita quoque triens trianguli ADB ad trientem excessus polygoni ADB supra polygonum AB. Ergo manifestum est circulum quoque totum majorem fore polygono ADB unâ cum triente excessus quo polygonum ADB superat polygonum AB, hoc est, unâ cum spatio II. Quod erat demonstrandum.

* per 3. Aug.

qu'on peut comparer à la suite que nous avons déduite dans la note 7, p. 94 du Tome présent. On voit d'ailleurs qu'ici et dans le théorème suivant Huygens a atteint, pour ainsi dire d'un seul coup, une approximation qu'on ne pourrait certainement améliorer sans la rendre plus compliquée, et qui est du même ordre que celle, bien moins simple, de Snellius, que nous avons mentionnée dans la note 8, p. 95.

THÉOR. VI. PROP. VI.

Tout cercle est plus petit que les deux tiers du polygone à côtés égaux qui lui est circonscrit, plus le tiers du polygone semblable inscrit⁶⁾.

Soit donné un cercle dont le centre est A, et circonscrivons-y un polygone équilatéral, dont un des côtés soit BC; et circonscrivons-y un autre semblable FEG, dont les côtés touchent le cercle aux sommets des angles du premier polygone. Je dis que le cercle est plus petit que les deux tiers du polygone FEG, augmentés du tiers du polygone BC. Menons en effet à partir du centre les droites AB, AC. Comme alors le triangle BEC repose sur la base du segment BDC et que ses côtés touchent le segment, ce segment fera moindre que les deux tiers du triangle BEC*. Ainsi lorsqu'on ajoute au triangle ABC deux tiers du triangle BEC, c'est-à-dire, deux tiers de l'excès du quadrilatère ABEC sur le triangle ABC, l'espace formé par les deux tiers du quadrilatère ABEC augmentés du tiers du triangle ABC. Mais il revient au même, que l'on ajoute au triangle ABC les deux tiers du dit excès, ou que l'on ajoute les deux tiers du quadrilatère ABEC, et que l'on enlève par contre les deux tiers du triangle ABC: mais par ceci on obtient les deux tiers du quadrilatère ABEC avec le tiers du triangle ABC. Il paraît donc que le secteur ABC est moindre que les deux tiers du quadrilatère ABEC augmentés du tiers du triangle ABC. Par conséquent, tout étant pris autant de fois que le secteur ABC est contenu dans le cercle, le cercle tout entier fera plus petit que les deux tiers du polygone circonscrit FEG et le tiers de l'inscrit BC. Ce qu'il fallait démontrer.

* d'après 4. ici.

⁶⁾ On a donc

$$\pi < \frac{2}{3} S_n + \frac{1}{3} s_n,$$

où S_n et s_n représentent les aires des polygones circonscrit et inscrit au cercle dont le rayon est l'unité.

On en déduit aisément, en employant les relations $S_n = \frac{1}{2} P_n$ et $s_n = \frac{1}{2} p_n$,

$$2\pi < \frac{2}{3} P_n + \frac{1}{3} p_n.$$

où P_n et p_n désignent respectivement les périmètres des mêmes polygones.

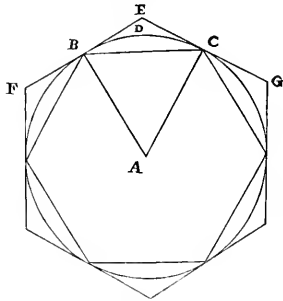
Ensuite, afin de pouvoir comparer cette formule à la suite (1) de la note 7, p. 94, nous

THEOR. VI. PROP. VI.

Omnis circulus minor est duobus tertiis polygoni æqualium laterum sibi circumscripti & triente polygoni similis inscripti ⁶⁾.

Esto circulus cujus centrum A, & inscribatur ipsi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum sit BC; & aliud simile circumscribatur FEG, cujus latera circumulum contingant ad occursum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem esse duobus tertiis polygoni FEG simul cum triente polygoni BC. Ducantur namque ex centro rectæ AB, AC. Igitur quoniam super basi portionis BDC confistit triangulum BEC, cujus latera portionem contingunt, erit ipsa minor duobus tertiis trianguli BEC*. Itaque si triangulo ABC addantur duæ tertiæ trianguli BEC, hoc est, duæ tertiæ excessus quadrilateri ABEC supra triangulum ABC, ex utrifque compositum spatium majus erit sectori circuli ABC. Idem est autem, siue triangulo ABC addantur duæ tertiæ excessus dicti, siue addantur duæ

^{*per. 4. duj.}



[Fig. 6.]

tertiæ quadrilateri ABEC, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli ABC: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri ABEC cum triente trianguli ABC. Ergo apparet sectorem ABC minorem esse duobus tertiis quadrilateri ABEC & triente trianguli ABC. Quare sumptis omnibus quoties sector ABC circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duobus tertiis polygoni circumscripti FEG & triente inscripti BC. Quod erat ostendendum.

$$\begin{aligned} \text{replaçons } p_{2n} \text{ par } p_{2n}^2: p_n &= p_{2n} + (p_{2n} - p_n) \cdot \frac{p_{2n}}{p_n} = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) \left\{ 1 + \frac{p_{2n} - p_n}{p_n} \right\} \\ &= p_{2n} + (p_{2n} - p_n) + \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_n} \cdot \frac{p_{2n}}{p_n} = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) + \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}}. \end{aligned}$$

De cette façon on arrive à la formule

$$2\pi < p_{2n} + \frac{1}{2}(p_{2n} - p_n) + \frac{1}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{1}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}} \right],$$

mentionnée dans la note 22, p. 98 et qui montre que l'approximation est du même ordre que celle qui est obtenue par le théorème précédent, dont celui-ci forme la contrepartie.

THÉOR. VII. PROP. VII.

Toute circonférence de cercle est plus grande que le périmètre du polygone à côtés égaux qui lui est inscrit, plus le tiers de la quantité dont ce même périmètre surpasse le périmètre d'un autre polygone inscrit duquel le nombre des côtés est la moitié⁷⁾.

Soit donné un cercle AB, à centre O, auquel est inscrit un polygone équilatéral ACD, et un autre, d'un nombre de côtés double AECBDF. Soit encore la droite GI égale au périmètre du polygone AECBDF, tandis que GH soit égale au périmètre du polygone ACD. La différence des deux périmètres est ainsi IH, dont le tiers IK soit ajouté à GI même. Je dis que la circonférence du cercle AB est plus grande que la droite GK entière. Inferivons, en effet, au cercle un troisième polygone équilatère ALEMC, qui ait un nombre de côtés deux fois plus grand que le polygone AECBDF. Et sur les lignes GH, HI, IK construisons des triangles dont le sommet commun soit N, et la hauteur égale au demi-diamètre du cercle AB. Alors, puisque la base GH est égale au périmètre du polygone ACD, le triangle GNH sera égal au polygone qui a deux fois autant de côtés, c'est-à-dire, au polygone AECBDF. C'est ce qui paraît, quand on a tracé du centre les droites OA et OE, dont la dernière coupe AC en P. Car le triangle AEO est égal à un triangle ayant comme base AP et comme hauteur le rayon OE. Mais, la quantième partie le triangle AEO est du polygone AECBDF, la même partie est la droite AP du périmètre ACD. Ainsi le polygone AECBDF sera égal au triangle dont la base est égale au périmètre ACD, et la hauteur au rayon EO; c'est-à-dire au triangle GNH. Pour la même raison, puisque la base GI est égale au périmètre du polygone AECBDF et que la hauteur du triangle GNI est égale au rayon du cercle, le triangle GNI sera égal au polygone ALEMC. Par suite, le triangle HNI est égal à l'excès du polygone ALEMC sur le polygone AECBDF. Mais le triangle INK est par construction le tiers du triangle HNI. Il fera donc égal au tiers du dit excès. Ainsi tout le triangle GNK sera moindre que le cercle AB*. Mais la hauteur du triangle est égale au demi-diamètre du cercle. Il est donc évident que la droite GK est moindre que toute la circonférence du cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Par là il est clair que, si des quatre tiers des côtés d'un polygone inscrit au cercle on retranche le tiers des côtés d'un autre polygone inscrit, d'un nombre de côtés égal à la moitié, le reste est plus petit que la circonférence. Car il revient au même, soit qu'on ajoute au plus grand périmètre $\frac{1}{3}$ de la quantité dont il surpasse

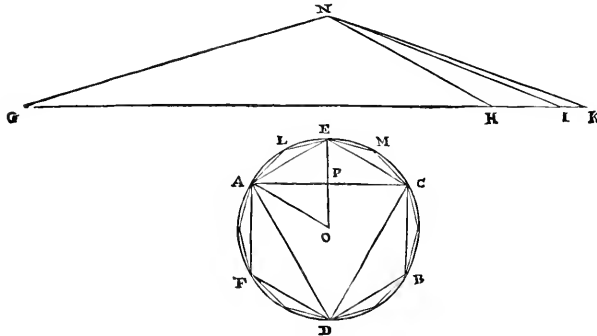
* d'après 5. *ibi*.

⁷⁾ Voir la seconde formule de la note 5.

THEOR. VII. PROP. VII.

Omnis circuli circumferentia major est perimetro polygoni æqualium laterum sibi inscripti, & triente excessus quo perimeter eadem superat perimetrum alterius polygoni inscripti subduplo laterum numero ⁷).

Etto circulus AB, centro O, cui inferibatur polygonum æquilaterum ACD, atque alterum duplo laterum numero AECBDF. Sitque recta GI æqualis perimetro polygoni AECBDF, GH vero æqualis perimetro polygoni ACD. Excessus igitur perimetrorum est HI; cuius triens IK adjiciatur ipsi GI. Dico totâ GK majorem esse circuli AB circumferentiam. Inferibatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum ALEM, quod sit duplo numero laterum polygoni



[Fig. 7.]

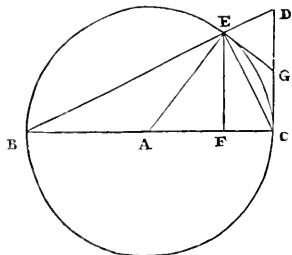
AECBDF. Et super lineis GH, HI, IK, triangula constituentur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis semidiametro circuli AB. Igitur quoniam GH basis æqualis est perimetro polygoni ACD, erit triangulum GNI æquale polygono cui bis totidem sunt latera, hoc est, polygono AECBDF. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis OA & OE, quarum hæc fecerit AC in P. Nam triangulum quidem AEO æquale est triangulo basin habenti AP & altitudinem radii OE. Quanta autem pars est triangulum AEO polygoni AECBDF, eadem est recta AP perimetri ACD. Itaque polygonum AECBDF æquabitur triangulo cujus basis æqualis perimetro ACD, altitudo autem radio EO; hoc est, triangulo GNI. Eâdem ratione, quoniam basis GI est æqualis polygoni AECBDF perimetro, & altitudo trianguli GNI æqualis radio circuli, erit triangulum GNI æquale polygono ALEM. Itaque triangulum HNI æquale excessui polygoni ALEM supra polygonum AECBDF. Trianguli autem HNI subtripulum est ex contr. triangulum INK. Ergo hoc æquale erit dicti excessus trienti. Quare totum trian-

le plus petit périmètre, soit qu'on ajoute $\frac{1}{3}$ du plus grand périmètre et que par contre on enlève $\frac{1}{3}$ du plus petit périmètre. Mais par là on obtient les quatre tiers du plus grand périmètre moins le tiers du plus petit. Ainsi, lorsque de seize côtés du dodécagone inscrit on déduit deux côtés de l'hexagone inscrit, c'est-à-dire le diamètre du cercle, la longueur restante sera moindre que la circonférence du cercle, ou bien, si l'on retranche le rayon de huit côtés du dodécagone, le reste sera moindre que la moitié de la circonférence. Or, ceci est utile pour une construction mécanique, parce que la différence est petite, ainsi que je le montrerai plus loin⁸⁾.

Il est clair aussi que, pour tout arc qui est moindre que la demi-circonférence, si à la corde sous-tendue on ajoute le tiers de la quantité dont la corde excède le sinus, la ligne composée est plus petite que l'arc.

THÉOR. VIII. PROP. VIII.

Un cercle étant donné, si à l'extrémité du diamètre on mène une tangente, et que l'on tire aussi de l'extrémité opposée du diamètre une droite qui coupe la circonférence et rencontre la tangente menée: les deux tiers de la tangente interceptée avec le tiers de la droite qui, à partir du point d'intersection, tombe à angles droits sur le diamètre, feront ensemble plus grands que l'arc découpé adjacent⁹⁾.



[Fig. 8.]

Soit donné un cercle de centre A et à diamètre BC; et soit menée à partir de C une droite CD qui touche le cercle: supposons qu'il y aboutisse une droite BD, tirée à partir de l'autre extrémité du diamètre, et qu'elle coupe la circonférence en E; et soit EF perpendiculaire au diamètre BC. Je dis que les deux tiers de la tangente interceptée CD, ensemble avec le tiers de cette droite EF, font plus grands que l'arc EC. Joignons en effet AE, EC; et menons une tangente au cercle au point E, qui rencontre la tangente CD en G. Ainsi GE sera égal à GC, et aussi à DG; car si avec G comme centre on décrit une circonférence qui passe par les points C, E, elle passera aussi par le point D, puisque l'angle CED est droit. Or nous avons montré ci-dessus, que les deux tiers du quadrilatère AEGC, ensemble avec le tiers du triangle AEC, font plus grands que le secteur AEC*. Et le quadrilatère AEGC est égal au triangle ayant comme base le double de CG,

⁸⁾ D'après 6. ici.

⁹⁾ Voir le „Problema II. Prop. XI“, p. 143 du Tome présent.

⁹⁾ Le but de ce théorème est surtout de préparer celui qui suit. Toutefois il est clair qu'il mène plus directement au suivant: Toute circonférence de cercle est plus petite que les deux tiers du

gulum GNK minus erit circulo AB*. Altitudo autem trianguli æqualis est circuli ^{*per.5.huj.} femidiametro. Ergo evidens est rectam GK totâ circuli circumferentiâ minorem esse. Quod erat ostendendum.

Hinc manifestum est, si à sesquitercio laterum polygoni circulo inscripti auferatur triens laterum polygoni alterius inscripti subduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus esse. Idem enim est, si perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ excessus quo ipsa superat perimetrum minorem, siue addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit sesquitercium majoris perimetri minùs triens minoris. Quare si à sexdecim inscripti dodecagoni lateribus duo latera inscripti hexagoni, hoc est, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit aut si ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ fessisse. Hoc autem ad constructionem mechanicam utile est, quoniam exigua est differentia, sicut postea ostendetur *).

Manifestum etiam, in omni arcu qui semicircumferentiâ minor sit, si ad subtensam addatur triens excessus quo subtensâ sinum superat, compositam arcu minorem esse.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

*Circulo dato, si ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab opposito diametri termino quæ circumferentiam secet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertie cum triente ejus quæ ab intersectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, simul arcu abscisso adiacente majores *).*

Esto circulus [Fig. 8] centro A, diametro BC; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat CD: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta BD, quæ circumferentiam secet in E: sitque EF diametro BC ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ CD duas tertias simul cum triente ipsius EF, arcu EC majores esse. Jungantur enim AE, EC; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti CD occurrat in G. Erit igitur GE ipsi GC æqualis, itemque DG; nam si centro G circumferentia describatur quæ transeat per puncta C, E, eadem transibit quoque per D punctum, quoniam angulus CED rectus est. Ostensum autem fuit suprà, duas tertias quadrilateri AEGC unâ cum triente trianguli AEC simul majores esse sectore AEC*. Estque quadrilaterum AEGC æquale triangulo ^{*per.6.huj.} bafin habenti duplam CG, hoc est, CD: & altitudinem CA, triangulum verò

périmètre d'un polygone à côtés égaux, qui lui est circonscrit, plus le tiers du périmètre du polygone inscrit dont le nombre des côtés est la moitié.

Mais il est probable que ce théorème, qu'on trouve exprimé par la seconde formule de la note 6 et qui est donc l'équivalent du „Theor. VI”, a été considéré par Huygens comme moins élégant et moins pratique que le „Theor. IX”, qu'il fait suivre, et dont, de plus, l'approximation est un peu meilleure.

c'est-à-dire, CD, et comme hauteur CA; mais le triangle AEC est égal au triangle ayant une base égale à cette EF et la dite hauteur AC. Ainsi il est clair que les deux tiers du quadrilatère AEGC, augmentés du tiers du triangle AEC, sont égaux au triangle qui a pour base une droite composée des deux tiers de CD et du tiers de EF, et dont la hauteur est le rayon AC. C'est pourquoi aussi le triangle fera plus grand que le secteur AEC. Il résulte de là que sa base, c'est-à-dire, la droite formée des deux tiers de CD et du tiers de EF, est plus grande que l'arc CE. Ce qu'il fallait démontrer.

THÉOR. IX. PROP. IX.

Toute circonférence de cercle est plus petite que les deux tiers du périmètre d'un polygone à côtés égaux qui lui est inscrit plus le tiers du périmètre du polygone semblable circonscrit ¹⁰⁾.

Soit donné un cercle dont le centre est A; et circonscrivons-y un polygone équilatéral, dont le côté est CD; et circonscrivons-y un autre semblable, à côtés parallèles à ceux du premier, desquels un soit EF. Je dis que la circonférence de tout le cercle est plus petite que les deux tiers du contour du polygone CD plus le tiers du contour du polygone EF. Menons en effet le diamètre du cercle BG, qui divise à la fois au milieu le côté CD du polygone inscrit en H et le côté EF du circonscrit en G (car évidemment G est le point de contact du côté EF). Et prenons HL égal à HG et joignons AC, BC et prolongeons-les; et supposons que BC rencontre le côté EF en K, tandis que la droite AC prolongée atteint en E l'angle du polygone circonscrit. Puisque ainsi HL est égal à HG, BL fera le double de AH; et par conséquent comme GA à AH ainsi GB est à BL. Mais le rapport de HB à BL est plus grand que celui de GB à BH; puisque les trois lignes GB, HB, LB s'excèdent mutuellement de la même quantité. Et ainsi le rapport de GB à BL, c'est-à-dire, de GA à AH, fera plus grand que le

¹⁰⁾ A l'aide des notations de la note 6, p. 130, le théorème s'exprime par la formule:

$$2\pi < \frac{1}{3} P_n + \frac{2}{3} p_n,$$

qu'on peut écrire:

$$2\pi < \frac{1}{3} P_{2n} + \frac{2}{3} p_{2n} = p_{2n} + \frac{1}{3} (p_{2n} - p_n) + \frac{1}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{1}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}} \right].$$

Pour arriver à ce théorème, en partant de celui que nous avons énoncé dans la note précédente, il suffira de prouver qu'on a:

$$\frac{1}{3} P_n + \frac{2}{3} p_n > \frac{1}{3} P_{2n} + \frac{1}{3} p_n,$$

ou bien, en introduisant les côtés A_n et a_n des polygones circonscrits et inscrits,

$$\frac{1}{3} A_n + \frac{2}{3} a_n > \frac{1}{3} A_{2n} + \frac{1}{3} a_n,$$

carré du rapport de GB à BH. Or, comme GA à AH, ainsi EG est à CH; et comme GB à BH, ainsi KG est à CH. Par conséquent, le rapport de EG à CH sera plus grand que le carré de celui de KG à CH. Pour cette raison le rapport de EG à KG est plus grand que celui de KG à CH. Par suite les deux lignes EG, CH sont certainement ensemble plus grandes que le double de KG ¹¹⁾. Et en prenant les tiers de toutes les lignes, les tiers des deux EG et CH seront ensemble plus grands que les deux tiers de KG. Pour cette raison, si l'on ajoute de part et d'autre le tiers de CH, le tiers de EG avec les deux tiers de CH sera plus grand que les deux tiers de KG avec le tiers de CH. Mais l'arc CG est encore plus petit que ceux-ci *. Donc, les deux tiers de CH, ensemble avec le tiers de EG, sont à plus forte raison plus grands que ce même arc CG. Si donc nous prenons toutes les grandeurs autant de fois que l'arc CG est contenu dans la circonférence entière, les deux tiers du périmètre du polygone CD, plus le tiers du périmètre du polygone EF, seront aussi plus grands que la circonférence du cercle entier. Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi donc, tout arc de circonférence plus petit qu'un quadrant est plus petit que les deux tiers de son sinus plus le tiers de sa tangente.

PROBLÈME I. PROP. X.

Trouver le rapport de la périphérie au diamètre, aussi proche que l'on veut du vrai.

Archimède prouva ¹²⁾, par les polygones inscrits et circonscrits de 96 côtés, que le rapport de la périphérie au diamètre est moindre que le triple et un septième, mais plus grande que $3\frac{1}{7}$. Mais nous allons démontrer ici la même chose au moyen du dodécagone.

En effet, puisque le côté du dodécagone inscrit au cercle est plus grand que $5176\frac{3}{8}$ des parties dont le rayon en contient 10000: la somme de douze côtés, c'est-à-dire, le périmètre du dodécagone inscrit, sera de même plus grand que $62116\frac{1}{2}$: mais le périmètre de l'hexagone inscrit est le sextuple du rayon, et se compose par conséquent de 60000 parties. Ainsi donc le périmètre du dodécagone excède le périmètre de l'hexagone de plus que $2116\frac{1}{2}$ parties. Le tiers de l'excès sera donc plus grand que $705\frac{1}{2}$. De sorte que le périmètre du dodécagone, ensemble avec le tiers de la quantité dont il excède le périmètre de l'hexagone, sera plus grand que la somme de $62116\frac{1}{2}$ et $705\frac{1}{2}$ parties, c'est-à-dire, que 62822 parties. Et par conséquent la périphérie du cercle sera à plus forte raison plus grande que cela *. Mais le rapport de 62822 à 20000, la longueur du diamètre, est plus

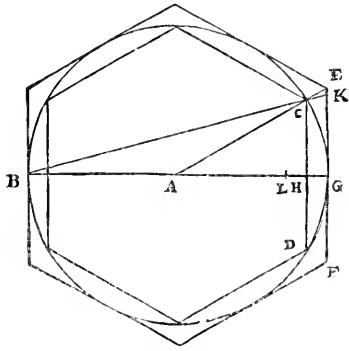
* d'après ce qui précède.

* d'après 7. ici.

¹¹⁾ Ce résultat aurait pu être atteint bien plus facilement en abaissant une perpendiculaire CM sur EG. Alors CK est la bissectrice de l'angle ECM et on a par suite $EK > KM$, c'est-à-dire: $EG - KG > KG - CH$; donc $EG + CH > 2 KG$.

¹²⁾ Au lieu cité dans la note 1, p. 93 du Tome présent.

AH, ita est EG ad CH; & sicut GB ad BH, ita KG ad CH. Ergo major erit ratio EG ad CH, quam duplicata ejus, quam habet KG ad CH. Quare major ratio EG ad KG, quam KG ad CH.



[Fig. 9.]

Ideoque duæ simul EG, CH omnino majores duplâ KG¹¹⁾. Et sumptis omnium trientibus, erunt trientes utriusque EG & CH simul majores duabus tertiis KG.

Quamobrem addito utrinque ipsius CH triente, erit triens EG cum duabus tertiis CH, major duabus tertiis KG cum triente CH. Hæc verò minor etiam est arcus CG*.

Igitur duæ tertiæ CH simul cum triente ipsius EG majores omnino sunt eodem arcu CG. Unde sumptis omnibus toties quoties arcus CG circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni CD, cum triente perimetri polygoni EF, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat ostendendum.

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor est sinus sui besse & tangentis triente.

PROBLEMA I. PROP. X.

Peripherie ad diametrum rationem invenire quamlibet vere propinquam.

Minorem esse peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam sesquiseptimam; majorem verò quam $3\frac{19}{24}$, Archimedes ostendit¹²⁾ inscripto circumferip-
toque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonstrabimus.

Quia enim latus inscripti circulo dodecagoni majus est partibus $5176\frac{3}{4}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc est, perimenter inscripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$; perimenter autem hexagoni inscripti est radii sextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimenter perimetrum hexagoni excedit amplius quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens excessus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimenter unâ cum triente excessus, quo perimetrum hexagoni superat, major erit aggregato partium $62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc est, partibus 62822. Atque hæc proinde omnino major erit circuli peripheria*. Est autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, * per. 7. huj.

grand que celui de $3\frac{1}{7}\frac{2}{3}$ à 1. Le rapport de la périphérie au diamètre fera donc à plus forte raison aussi plus grand.

D'autre part, puisque le côté du dodécagone inscrit est plus petit que $5176\frac{2}{3}$ parties, huit côtés, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$ du périmètre, seront moindres que $41411\frac{1}{3}$. De même, puisque le côté du dodécagone circonscrit est plus petit que 5359, quatre côtés, c'est-à-dire, le tiers du périmètre, seront moindres que 21436. Pour cette raison, $\frac{2}{3}$ du périmètre du dodécagone inscrit plus le tiers du périmètre du circonscrit seront moindres que $62847\frac{1}{3}$. Mais la circonférence de cercle est aussi plus

** d'après 9, ici.* petite que cette somme*. Cette circonférence fera donc à plus forte raison au diamètre dans un rapport moindre que $62847\frac{1}{3}$ à 20000; et bien moindre par conséquent que $62857\frac{1}{3}$ à 20000, ce qui est le triple et un septième. Et ainsi font démontrées les limites du rapport de la périphérie au diamètre qu'Archimède établit. Mais nous les démontrerons dans la suite ¹³⁾ en nous servant du côté du seul triangle équilatéral inscrit. Ensuite, pour trouver un rapport plus approché il faudra considérer des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Ainsi figurons nous que nous ayons circonscrit au cercle un polygone de 60 côtés et que nous en ayons inscrit un autre. Et qu'en outre soit inscrit un polygone d'un nombre de côtés égal à la moitié, savoir celui de trente côtés.

Or, on trouve que le côté du polygone à soixante côtés inscrit est plus grand que 10467191 parties dont le rayon en contient 100000000 et le côté du polygone à trente côtés plus petit que 20905693 parties: dont la moitié 10452846 $\frac{1}{2}$ est le sinus de l'arc égal à $\frac{1}{60}$ de la circonférence. Mais la corde sous-tendue était 10467191. Donc la différence est $14344\frac{1}{2}$, moindre que la vraie: et le tiers de la différence est $4781\frac{1}{2}$, ce qui, ajouté à la sous-tendue 10467191, fait 10471972 $\frac{1}{2}$. De sorte que l'arc de $\frac{1}{60}$ de la circonférence est plus grand que ce nombre de parties. Mais en le comptant 60 fois on obtient 628318350. Par conséquent la circonférence entière est à plus forte raison plus grande que ce nombre de parties.

Et puis, comme le côté du polygone inscrit à 60 angles est plus petit que 10467192, les deux tiers de celui-ci seront moindres que 6978128. Mais comme le côté du polygone circonscrit de 60 angles est plus petit que 10481556, le tiers de celui-ci sera plus petit que 3493852. Ce qui ajouté à 6978128 fait 10471980. Ce nombre de parties surpasse donc certainement $\frac{1}{60}$ de la circonférence, et le soixantuple de celles-là, c'est-à-dire, 628318800, sera plus grand que la circonférence toute entière. Mais employons encore des polygones de 10800 côtés, dont d'une part le côté de l'inscrit, qui est sous-tendu par un arc de deux minutes, a été trouvé, d'après le calcul de Ludolphe de Cologne, un arithméticien distingué, se composer de 58177640912684919 parties et pas une de plus, tandis que le côté du polygone circonscrit est de 58177643374063182 parties et pas une de moins. Et en outre le côté du polygone inscrit dont le nombre des côtés est la moitié, est de 116355276902613523 parties et pas une de moins ¹⁴⁾. On déduit de

là que la longueur de la périphérie est plus grande que 6283185307179584 parties et plus petite que 6283185307179589, dont le rayon en a 1000000000000000. Or, par la méthode habituelle de l'addition des côtés de ces polygones inscrit et circonscrit on trouverait seulement que la périphérie est plus grande que 62831852 parties, et plus petite que 62831855. On voit donc que nous avons trouvé un nombre de chiffres vrais plus grand que le double. Mais il en est de même aussi dans ce qui précède, et doit toujours arriver quel que soit le nombre de côtés des polygones dont nous faisons usage. Et par les propositions que nous donnerons dans la suite, on verra qu'on peut facilement obtenir un nombre de chiffres trois fois plus grand ¹⁵⁾.

PROBLÈME II. PROP. XI.

Prendre une droite égale à la périphérie d'un cercle donné.

Nous avons montré ci-dessus ¹⁶⁾ que huit côtés du dodécagone inscrit, diminués du rayon du cercle, sont plus petits que la demi-périphérie. Mais dans une construction, la différence ne peut pas être aperçue dans la plupart des cas. Car si l'on ajoute la quatre-millième partie du diamètre à la longueur ainsi trouvée, elle dépassera déjà la demi-périphérie. C'est ce que l'on reconnaît comme il suit. Des parties dont le rayon en a 10000, le côté du dodécagone inscrit dans le cercle en contient plus que $5176\frac{3}{8}$. De sorte que huit côtés sont plus grands que 41411, et retranchant le rayon 10000, le reste sera plus grand que 31411; si l'on ajoute à cela 5 parties, ce qui est $\frac{1}{20000}$ du diamètre, on trouve déjà 31416; et il résulte de ce qui précède que la moitié de la circonférence est plus petite que ce nombre de parties. Or, le côté du dodécagone inscrit s'obtient facilement, puisque le rayon sous-tend un sextant de la périphérie. Et ce rapport est plus précis que si nous faisons usage du triple et un septième. Car suivant ce dernier rapport la longueur dépasse la $\frac{1}{2}$ ¹⁷⁾ périphérie de plus de $\frac{1}{20000}$ du diamètre.

¹⁵⁾ Soit k le nombre des chiffres fourni par la méthode d'Archimède, appliquée aux polygones de $2n$ côtés, alors, en posant le rayon du cercle égal à l'unité, on aura :

$$P_{2n} - p_{2n} = \frac{P_{2n}^2}{p_n} - p_{2n} = \frac{P_{2n}}{p_n} (p_{2n} - p_n) = a 10^{-k+1}, \text{ où } a < 1;$$

done, certainement :

$$P_{2n} - p_{2n} < a 10^{-k+1}.$$

Or, la différence des limites respectives, données par les Théorèmes VII et IX est égale à

$$\frac{1}{3} \frac{(P_{2n} - p_n)^2}{p_n}.$$

Elle sera donc plus petite que $\frac{10}{3} a^2 10^{-2k+1}$.

On connaîtra donc, généralement parlant, le nombre 2π , à l'aide de ces limites, jusqu'en $2k$

6283185307179584; minor autem quam 6283185307179589, qualium radius 100000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inferipti circumscriptique polygoni istius lateribus, invenietur tantum majorem esse peripheriam partibus 62831852, & minore 62831855. Patet igitur notarum verarum amplius quam duplum numerum esse à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita se habet, semperque evenire necesse est quocunque laterum polygonis utamur. At per ea, quæ postea trademus, triplum numerum notarum faciliè obteneri apparebit ¹⁵⁾.

PROBLEMA II. PROP. XI.

Rectam sumere peripheriæ dati circuli æqualem.

Ostenfum est superius ¹⁶⁾, quod octo inferipti dodecagoni latera dempto circuli radio minora sunt peripheriâ dimidiâ. In constructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam si quatermillesima diametri pars accedat longitudini sic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod sic fiet manifestum. Quorum partium radius est 10000, earum latus dodecagoni inferipti circulo est amplius quam 5176 $\frac{3}{4}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui si addantur partes 5, hoc est, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem esse circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem dodecagoni inferipti faciliè invenitur, quia radius peripheriæ sextantem subtendit. Estque hæc ratio accuratior quam si triplâ sesquiseptimâ utamur. Nam secundum eam excedetur $\frac{1}{2}$ ¹⁷⁾ peripheriæ longitudo amplius quam $\frac{1}{4000}$ diametri.

chiffres au moins; mais comme a^2 sera souvent considérablement moins que l'unité, le nombre des chiffres connus pourra excéder facilement le nombre $2k$ d'une et quelquefois de deux unités, et de plus encore.

Plus loin, au „Problema IV”, Huygens emploie des limites dont la différence est à peu près égale à $\left(\frac{2}{25} - \frac{22}{675}\right)(p_{2n} - p_n)^3$; $4\pi^2 = \frac{8}{675\pi^2}(p_{2n} - p_n)^3 < \frac{32}{27\pi^2}a^3 10^{-3k+1}$ et on trouvera donc alors, en général, $3k$ chiffres et plus, au moyen de ces nouvelles limites.

L'assertion de Huygens est donc juste, si l'on excepte les cas très spéciaux où une légère différence exerce une influence anormale sur le nombre des chiffres connus.

Nous ne savons pas, d'ailleurs, précisément comment Huygens y est parvenu; mais il semble probable qu'en cherchant la différence des limites, il a remarqué qu'elle dépendait respectivement du carré et du cube de l'expression $p_{2n} - p_n$; ce qui, de plus, a pu lui suggérer la comparaison avec le nombre des chiffres du carré et du cube d'un nombre donné, laquelle on rencontre dans la préface à la p. 117 du Tome présent.

¹⁶⁾ Voir l'avant-dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII. Prop. VII”, p. 135.

¹⁷⁾ Le nombre $\frac{1}{2}$ a été interpolé à la plume dans l'exemplaire de Huygens, que nous possédons.

AUTREMENT.

Soit donné un cercle dont BC est le diamètre. Divisons la demi-circonférence BC en deux parties égales au point D, et le reste en trois parties égales en E et F. Et joignons DE, DF, qui coupent le diamètre en G et H. Alors l'un des côtés du triangle GDH, ajouté à la base GH, fera un tout petit peu plus grand que le quadrant BD, et ne le dépassera même pas de $\frac{1}{3000}$ du diamètre BC. Il faut savoir, en effet, que DG ou DH sont égaux à deux côtés du dodécagone inscrit¹⁸⁾, tandis que GH est égal au côté du dodécagone circonscrit¹⁹⁾. D'où il résulte que la somme de DG et GH est plus grande que le quadrant BD. Car, comme d'après la Prop. 8²⁰⁾ huit côtés du dodécagone inscrit dans le cercle avec quatre côtés du circonscrit sont plus grands que la périphérie toute entière, pour cette raison, en prenant la quatrième partie du tout, deux côtés de l'inscrit avec un seul côté du circonscrit seront aussi plus grands que le quart de la périphérie. Ensuite, puisque le côté du dodécagone inscrit est plus petit que 51764 parties dont BC en a 200000, deux côtés, c'est-à-dire GD, seront moindres que 103528. Mais le côté du dodécagone circonscrit est plus petit que 53590 parties, donc aussi la droite GH. Par conséquent les droites DG et GH réunies sont moins que 157118. Mais, d'après ce qui précède, on fait que le quadrant BD est plus grand que 157079. La différence est donc plus petite que 39 parties, alors que 40 ne font que $\frac{1}{3000}$ du diamètre BC.

AUTREMENT²¹⁾.

Ajoutons à trois demi-diamètres $\frac{1}{40}$ du côté du carré inscrit; la droite ainsi composée égalera la demi-circonférence de si près, qu'elle n'est pas plus courte que $\frac{1}{180000}$ ²²⁾ du diamètre. Le côté du carré est plus grand que 141421 parties dont le rayon en a 100000, d'où ce qui vient d'être dit se démontre aisément.

Ou plutôt on ajoutera à six demi-diamètres $\frac{1}{5}$ du côté fusdit du carré inscrit, pour avoir une droite égale à la périphérie totale.

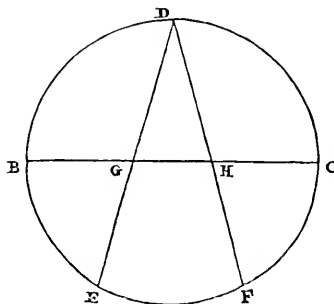
¹⁸⁾ Puisque l'angle EDF égale 30°, on a $\frac{1}{2}DH = \frac{1}{2}r : \cos 15^\circ = r \sin 30^\circ : \cos 15^\circ = 2r \sin 15^\circ = a_{12}$.

¹⁹⁾ Soit M le centre du cercle, alors, puisque EDF est 30°, il est évident que GH est un des côtés du dodécagone circonscrit à un cercle dont le rayon égale DM et dont D est le centre.

²⁰⁾ Lisez 9.

ALITER.

Esto datus circulus cujus BC diameter. Dividatur semicircumferentia BC bifariam in D. reliqua verò trifariam in E & F. Et jungantur DE, DF, quæ



[Fig. 10.]

fecerint diametrum in G & H. Erit trianguli GDH latus alterum unà cum basi GH quadrante BD exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri BC. Sciendum est enim fieri DG vel DH duobus inscripti dodecagoni lateribus æquales¹⁸⁾. GH autem lateri dodecagoni circumscripti¹⁹⁾. Unde quidem junctas DG & GH majores esse constat quadrante BD. Nam quia per 8.²⁰⁾ huj. octo latera dodecagoni circulo inscripti cum quatuor lateribus circumscripti majora sunt peripheriâ totâ, ideo sumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inscripti cum latere uno circumscripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inscripti

dodecagoni minus est quam partium 51764 qualium BC 200000: erunt latera duo, hoc est, GD, minor quam 103528. Circumscripti autem dodecagoni latus minus est partibus 53590, ipsa nimirum GH. Itaque junctâ unâ DG, GH efficiunt minus quam 157118. At quadrantem BD constat ex præcedentibus majorem esse quam 157079. Ergo differentia minor est quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri BC.

ALITER²¹⁾.

Tribus semidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inscripti quadrati; composita semicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{18000}$ ²²⁾ diametri brevior sit. Latus quadrati est majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum est facile demonstratur.

Vel potius sex semidiametris addatur $\frac{1}{5}$ dicti lateris quadrati inscripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

²¹⁾ Tout ce second „Aliter” ne se trouvait pas dans le texte; Huygens l’a ajouté à la plume dans son exemplaire à une date qui nous est inconnue.

²²⁾ Lisez $\frac{1}{11000}$. La différence est sensiblement la $\frac{1}{11700}$ ième partie du diamètre.

PROBLÈME III. PROP. XII.

Prendre une droite égale à un arc donné quelconque.

Soit donné un arc de circonférence CD, d'abord plus petit qu'un quadrant, dont il s'agisse de trouver une droite qui lui est égale. Divisons l'arc CD en deux parties égales en E, et supposons que la droite FG soit égale à la corde sous-tendue CD. Et soit FH égale à la somme des deux cordes CE, ED, qui sous-tendent les moitiés des arcs. Et à cette FH ajoutons HI, le tiers de l'excès GH. La droite entière FI sera presque égale à l'arc CD; de manière que, en y ajoutant une petite partie, dont elle en contient 1200, elle sera plus grande, même si l'arc CD est donné égal à un quadrant. Mais dans les arcs plus petits la différence sera plus petite. Car si l'arc donné n'est pas plus grand que le sextant de la périphérie, la ligne trouvée différera moins de $\frac{1}{8000}$ de sa grandeur de la vraie longueur de l'arc. Or, que les droites trouvées de cette façon sont plus petites que les arcs, cela résulte du théorème 7 de cet ouvrage. Mais nous allons démontrer ce qui en est de la grandeur de la différence.

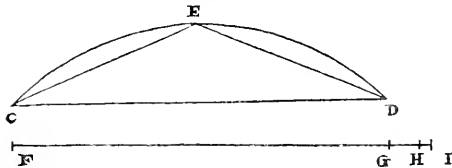
Ainsi, posant d'abord l'arc CD égal à un quadrant de la périphérie, la droite CD, ou FG, sera le côté du carré inscrit dans le cercle, et plus petit par conséquent que 141422 parties, dont le rayon du cercle en a 100000. Mais CE ou ED est le côté de l'octogone inscrit, et par suite plus grande que 76536. Mais FH est égale au double de ED. Cette droite est donc supérieure à 153072. De sorte que l'excès GH est plus grand que 11650. Et le tiers HI de cet excès est plus grand que 3883. Par conséquent la droite FI toute entière est supérieure à 156955. Mais l'arc CD, étant supposé égal à un quadrant, est plus petit que 157080. La droite FI s'écarte donc de cet arc de moins de 125 parties, dont elle en a elle-même 156955. Cela fait donc moins que $\frac{1}{1200}$ de la droite FI elle-même.

Mais si l'arc CD est un sextant de la périphérie, la droite CD, ou FG, est le côté de l'hexagone inscrit, et se compose donc de 10000 parties, et CE ou ED est le côté du dodécagone, et est donc plus grand que $5176\frac{3}{8}$, dont le double FH est supérieur à 10352 $\frac{3}{4}$. Il s'ensuit que GH est plus grande que $352\frac{3}{4}$, et HI plus grande que $117\frac{1}{2}$. De sorte que la droite FI toute entière est plus grande que $10470\frac{1}{2}$. Mais l'arc CD, un sextant de la périphérie, est plus petit que 10472. Il manque donc à la ligne FI un nombre de ces mêmes parties plus petit que $1\frac{1}{2}$. Ce qui ne fait pas $\frac{1}{8000}$ de FI. Ensuite, si l'on donne un arc plus grand qu'un quadrant, on le divisera en 4 parties égales, ou en 6, ou en un nombre plus grand encore, suivant que nous voulons faire usage d'une dimension plus précise; mais en nombre pair; et à l'ensemble des cordes qui sous-tendent ces parties on ajoutera le tiers de la quantité dont elles surpassent la somme de celles qui sous-tendent des arcs doubles. De cette manière, en effet, on composera la longueur de l'arc entier.

PROBLEMA III. PROP. XII.

Dato arcui cuicunque rectam aequalem summere.

Esto datus circumferentiæ arcus CD, primum quadrante minor, cui rectam æqualem summere oporteat. Dividatur arcus CD bifariam in E, sitque subtensæ



[Fig. 11.]

CD æqualis recta FG. Duabus verò CE, ED, quæ subtendunt arcus dimidios, æqualis FH. Et ipsi FH jungatur HI triens excessus GH. Erit tota FI arcui CD æqualis ferè: aded ut unâ sui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura sit, etiam si arcus

CD quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam si fuerit datus non major peripheriæ sextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{10000}$ sui partè à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem esse arcubus rectas eo modo inventas constat ex Theoremata 7. huj. De quantitate autem differentiæ est ostendendum.

Primum itaque ponendo arcum CD quadranti peripheriæ æqualem, erit CD recta, hoc est, FG, latus quadrati circulo inscripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. CE autem vel ED latus inscripti octogoni, ideoque major quam 76536. Est autem duplæ ED æqualis FH. Ergo hæc major quam 153072. Quare excessus GH major quam 11650: Et hujus triens HI major quam 3883. Ideoque tota FI major quam 156955. Arcus autem CD cum quadranti æqualis ponitur minor est quam 157080. Itaque minus ab hoc discrepat recta FI quam paribus 125, qualium ipsa est 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{12500}$ ipsius FI.

Si verò sextans peripheriæ sit arcus CD, erit recta CD, hoc est, FG, latus hexagoni inscripti, ideoque partium 10000, & CE vel ED latus dodecagoni, ac proinde major quam 5176 $\frac{3}{4}$. cujus dupla FH major quam 10352 $\frac{3}{4}$. unde GH major quam 352 $\frac{3}{4}$; & HI major quam 117 $\frac{7}{8}$. Tota igitur FI major quam 10470 $\frac{1}{2}$. Arcus autem CD, sextans peripheriæ, minor est quam 10472. Ergo deficiunt lineæ FI partium earundem pauciores quam 1 $\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{8000}$ FI. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus est in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimensione uti voluerimus; sed numero pares: Earumque partium subtensis simul sumptis adjungendus est triens excessus quo ipsæ superant aggregatum earum quæ arcubus duplis subtenduntur. Ita namque com-

Ou bien, pour la même raison, on aura la même chose, en cherchant la longueur de l'arc restant à la demi-circonférence ou l'excès sur celle-ci, ou la longueur de celui qui reste à la circonférence entière, si l'arc donné était plus grand que les trois quarts d'une circonférence; et cette longueur serait ajoutée ou enlevée à la moitié ou à la totalité de la longueur de la circonférence, que nous avons appris à trouver ci-devant.

THÉOR. X. PROP. XIII.

Le côté d'un polygone équilatéral inscrit dans un cercle est moyen proportionnel entre le côté du polygone semblable circonscrit, et la moitié du côté du polygone inscrit dont le nombre des côtés est la moitié ²³⁾.

Dans un cercle dont le centre est A, le rayon AB, soit BC le côté du polygone inscrit, et DE le côté, parallèle à ce BC, du polygone circonscrit semblable. Ainsi la droite AB prolongée passe par D, et AC par E. Et si l'on mène CF à angles droits sur AB, cette droite fera le demi-côté du polygone inscrit, dont le nombre des côtés est la moitié. Il s'agit donc de prouver, que BC est moyenne proportionnelle entre ED et CF. Menons AG, qui divise ED en deux parties égales; elle fera aussi le demi-diamètre du cercle et égale à AB. Et puisqu'on a DA à AB, c'est-à-dire DA à AG, comme ED est à CB, mais BC à CF, comme DA à AG, à cause des triangles semblables DAG, BCF; on a par conséquent que CB est à CF comme ED est à CB; ce qu'il fallait démontrer.

LEMME ²⁴⁾.

Soit la ligne BC divisée en deux parties égales en R, et en parties inégales en F, et soit FC le plus grand segment; et faisons BO égale à la somme de BC et CF,



[Fig. 13.]

mais BM égale à la somme de BC et CR. Je dis que le rapport de RB à BF est plus grand que la troisième puissance de celui de OB à BM. Prenons en effet chacun des deux segments ML, LP égal à OM. Alors puisque MO est égale à RF, (car cela se comprend par la construction) PO sera le triple de FR. Mais aussi BM est le triple de BR. Donc, comme BR à BM ainsi FR est à PO. Et, en permutant, BM à PO comme BR à FR. Mais BO est plus grand que BM. Donc le rapport de BO à OP sera plus grand que celui de BR à RF et par

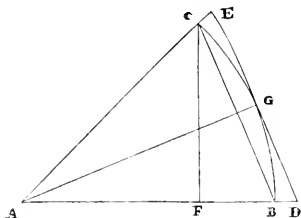
²³⁾ On a donc encore, en employant les notations de la note 7, p. 94: $p_n^2 = p_n P_{2n}$. Consultez, sur la connection de ce théorème avec la „Prop. IX” de Snellius, la même note 7, p. 94.

ponetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, si arcus reliqui ad femicircumferentiam longitudo inveniatut aut supra eandem excessus, aut reliqui ad circumferentiam totam, si dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

THEOR. X. PROP. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inscripti, proportionem medium est inter latus polygoni similis circumscripti, & dimidium latus polygoni inscripti subduplo laterum numero ²³).

In circulo cujus centrum A, radius AB, fit latus inscripti polygoni æquilateri BC; & latus circumscripti similis polygoni DE ipsi BC parallelum. Ergo producta AB transibit per D, & AC per E. Et si ducatur CF ipsi AB ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inscripti subduplo numero laterum. Itaque ostendendum est, BC medium esse proportionem inter ED & CF. Ducatur AG, quæ dividat ED bifariam, itaque erit ipsa quoque circuli femidiameter & æqualis AB. Et quoniam est ut ED ad CB, sic DA ad AB, hoc est, DA ad AG; sicut autem DA ad AG, ita BC ad CF, propter triangulos similes DAG, BCF. Erit proinde ut ED ad CB, ita quoque CB ad CF. Quod erat demonstrandum.



[Fig. 12.]

LEMMA ²⁴).

Esto linea BC [Fig. 13] divisa æqualiter in R; & inæqualiter in F, sitque segmentum majus FC; & fiat BO æqualis utrique simul BC, CF; BM verò utrique BC, CR. Dico majorem esse rationem RB ad BF, quam triplicatam ejus, quam habet OB ad BM. Sumatur enim ipsi OM æqualis utraque harum ML, LP. Quoniam igitur MO ipsi RF æquales est, (nam hoc ex constructione intelligitur) erit PO tripla ipsius FR. Sed & BM tripla est BR. Ergo ut BR ad BM, ita FR ad PO. Et permutando ut BR ad FR, sic BM ad PO. Major autem est BO quam BM. Ergo major erit ratio BO ad OP, quam BR ad RF: & per conversionem rationis

²⁴) Ce „lemma“ doit servir à préparer le théorème qui suit, auquel Huygens attachait tant d'importance; voir la note 17, p. 97 du Tome présent.

En posant $BR = a$, $RF = x$, le lemme nous apprend que pour $x < a$ on a: $\frac{a}{a-x} > \left(\frac{3a+x}{3a}\right)^3$, ou, si l'on veut, $\frac{1}{1-\xi} > (1 + \frac{1}{3}\xi)^3$, où $\xi < 1$.

conversion des rapports, le rapport de OB à BP fera moindre que celui de RB à BF ²⁵). Ensuite, puisque OM et ML sont égales, le rapport de BO à OM fera plus grand que BM à ML, et, par conversion des rapports, le rapport OB à BM fera plus petit que MB à BL. On prouvera encore de même que le rapport MB à BL est plus petit que LB à BP. De sorte qu' à plus forte raison la troisième puissance du rapport de OB à BM fera plus petit que celui qui est composé des rapports OB à BM, BM à BL, et BL à BP, c'est-à-dire que le rapport OB à BP. Mais RB à BF était plus grand que OB à BP. Donc, à plus forte raison, le rapport RB à BF fera plus grand que la troisième puissance du rapport OB à BM. Ce qu'il s'agissait d'établir.

THÉOR. XI. PROP. XIV.

Toute circonférence de cercle est moindre que la plus petite de deux moyennes proportionnelles entre les périmètres de polygones semblables, dont l'un est régulièrement inscrit dans le cercle, l'autre circonscrit. Et le cercle est plus petit que le polygone semblable à ceux-là, dont le contour est égal à la plus grande des moyennes ²⁶).

Soit un cercle BD, dont le centre est A. Inscrivons-y un polygone équilatéral BCDL, et circonscrivons-en un semblable à côtés parallèles HKMN. Supposons que la droite T est égale au périmètre du polygone HKMN, et la droite Z égale au périmètre de BCDL. Et soient entre Z et T deux moyennes proportionnelles X et V, dont X est la plus petite. Je dis que la circonférence du cercle BD est moindre que la droite X. Et si l'on fait un polygone Y, dont le périmètre est égal à la droite V, mais qui est semblable au polygone BCDL ou HKMN, je dis que le cercle BD est plus petit que le polygone Y. Menons en effet le diamètre PE du cercle, qui divise en deux parties égales les côtés parallèles BC, HK des polygones inscrit et circonscrit, en R et E; E fera ainsi le point de contact du côté HK, et BC fera coupé en R à angles droits. Menons aussi du centre la droite ACK, qui divise en deux parties égales les angles C et K des deux polygones, car il est avéré que cela se fait par la même droite, et joignons CE. Mais prenons CF égale à CE, et soit CG une troisième proportionnelle à ces deux droites CR, CF. Alors, comme CE ou CF est le côté d'un polygone inscrit, CG sera le côté du polygone semblable circonscrit *. Et par suite les deux tiers de CF avec letiers de CG feront ensemble plus grands que l'arc EC *. Mais soit la droite S égale aux deux tiers de CF avec le tiers de CG. Cette droite sera donc plus grande que l'arc EC.

Et puisque CR est à CF comme CF est à CG, on aura aussi que le double de CR ajouté à CF est au triple de CR, c'est-à-dire que la somme de BC et CF est à la somme de BC et CR, comme le double de CF avec CG est au triple de CF: ou, en prenant les tiers de ces grandeurs, comme $\frac{2}{3}$ CF avec $\frac{1}{3}$ CG est à CF, c'est-à-dire comme S est à CF. Donc aussi la troisième puissance du rapport qui existe

* d'après 13. *ici*.

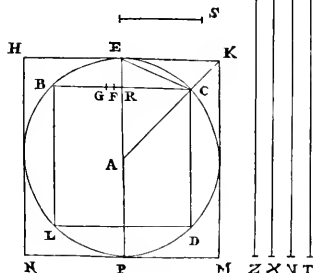
* d'après 9. *ici*.

minor OB ad BP, quam RB ad BF²⁵⁾. Porro quoniam æquales sunt OM, ML, major erit ratio BO ad OM, quam BM ad ML : & per conversionem rationis minor OB ad BM, quam MB ad BL. Eodem modo minor adhuc ostendetur ratio MB ad BL, quam LB ad BP. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet OB ad BM minor erit quam composita ex rationibus OB ad BM, BM ad BL, & BL ad BP, hoc est, quam ratio OB ad BP. Major autem erat RB ad BF, quam OB ad BP. Ergo omnino major erit ratio RB ad BF, quam triplicata rationis OB ad BM. Quod erat propositum.

THEOR. XI. PROP. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor est minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum similium, quorum alterum ordinate circulo inscriptum sit, alterum circumscriptum. Et circulus minor est polygono istis simili cujus ambitus majori mediarum æquetur²⁶⁾.

Esto circulus BD, cujus centrum A. Et inferibatur ei polygonum æquilaterum BCDL, simileque circumscribatur lateribus parallelis HKMN. Sitque perimetro polygoni HKMN æqualis recta T, perimetro autem BCDL æqualis Z. Et inter Z & T duæ sint medie proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli BD minorem esse rectâ X. Et si fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectâ V, simile



[Fig. 14.]

²⁵⁾ Huygens, ici et plus loin, emploie un théorème de la théorie des proportions qui pour $a > b$, $c > d$ permet de conclure de l'inégalité $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ à celle-ci: $\frac{a}{a-b} < \frac{c}{c-d}$.

²⁶⁾ Consultez, sur la première partie de ce théorème, la p. 97 du Tome présent. La démonstration de cette partie revient à l'application de l'égalité $P_{2n} p_n = p_{2n}^2$ et des inégalités $2n < \frac{2}{3} p_{2n} + \frac{1}{3} P_{2n}$ et $\frac{p_n}{2p_n - p_{2n}} > \left(\frac{2p_n + p_{2n}}{3p_n} \right)^3$, prouvées au Théorème IX et au Lemme qui précède ici, et ensuite à la démonstration de l'inégalité $(2p_n - P_{2n})p_{2n} < p_n(2p_n - p_{2n})$ (c'est-à-

autem sit polygono BCDL aut HKMN; Dico circumulum BN minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli PE, quæ dividat bifariam latera parallela BC, HK, inferipti circumscriptique polygones in R & E; erit autem E punctum contactus lateris HK, & BC secabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta ACK, quæ utriusque polygones angulos C & K bifariam fecerit, nam hoc ab eadem recta fieri constat; & jungatur CE. Ipsi autem CE ponatur æqualis CF; sitque duabus his CR, CF tertia proportionalis CG. Ergo qualis polygones inferipti latus est CE sive CF, talis circumscripti latus erit CG*. Ideoque duæ ^{*per. 13. luj.} tertiæ CF cum triente CG simul majores erunt arcu EC*. Sit autem duabus ^{*per. 9. luj.} tertiis CF cum triente CG æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu EC.

Et quoniam se habet CR ad CF, ut CF ad CG; erit quoque dupla CR una cum CF ad triplam CR, hoc est, utraque simul BC, CF ad utramque BC, CR, ut dupla CF una cum CG ad triplam CF: vel sumptis horum tricentibus, ut $\frac{2}{3}$ CF unâ cum $\frac{1}{3}$ CG ad CF, hoc est, ut S ad CF. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque simul BC, CF ad utramque BC, CR eadem erit triplicatæ rationi S ad CF. Major autem est ratio RB ad BF quam triplicata ejus, quam habet utraque simul BC, CF ad utramque BC, CR*. Ergo major eadem ratio ^{*per lemma præc.} RB ad BF quam triplicata ejus quam habet S ad CF, hoc est, quam cubi S ad cubum CF. Sicut autem RB ad BF, ita est cubus RB ad id quod fit ex quadrato RB in BF. Ergo major quoque ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF. Quadrato autem RB in BF minus est rectangulum sub RB, BG, in FC; quod sic ostenditur. Quia enim proportionales sunt RC, CF, CG, Erit id quo major mediam excedit, hoc est, FG major quam media minimam, hoc est, quam FR. Major autem est FC quam FB. Ergo omnino major erit ratio CF ad FR, quam BF ad FG. Et per conversionem rationis, minor ratio FC ad CR, quam FB ad BG ²⁵). Et permutando minor FC ad FB, quam CR seu RB ad BG: hoc est, (sumptâ communi altitudine BR) quam quadrati RB ad rectangulum RBG. Unde quod fit ex rectangulo RBG in FC minus erit quam quod ex quadrato RB in FB, uti dictum fuit. Quum itaque major ostensa fuerit ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF; omnino

dire BG. CF < RB. BF) et de l'égalité $(2p_n - P_{2n}) : P_{2n} = p_n : P_n$ ou $2p_n - P_{2n} = p_{2n}^2 : P_n$ (c'est-à-dire BG : GC = RC : EK). A l'aide de ces formules le théorème en question se démontre ainsi :

$$2\pi < \frac{2}{3} p_{2n} + \frac{1}{3} P_{2n} = \frac{p_{2n}(2p_n + P_{2n})}{3p_n} < p_{2n} \sqrt{\frac{p_n}{2p_n - P_{2n}}} < \sqrt[n]{\frac{p_n^2}{2p_n - P_{2n}}} = \sqrt[n]{p_n^2 P_n}.$$

C'est ici la seule fois que Huygens emploie une relation (p. 155. l. 7) qui équivaut à la relation importante $2p_n - P_{2n} = p_{2n}^2 : P_n$.

Quant à la seconde partie du théorème, elle amène l'inégalité $\pi < \left(\sqrt[n]{\frac{p_{2n} P_{2n}^2}{P_n}} \right)^2 S_{2n}$, qui, à l'aide la relation $S_{2n} = \frac{1}{2} P_{2n}$, se réduit, elle aussi, à celle-ci: $2\pi < \sqrt[n]{p_{2n}^2 P_{2n}^2} S_{2n}$; voir encore la première page de la préface et surtout la note 1, p. 115 du Tome présent.

RB au cube S fera plus grand que celui du rectangle RBG au rectangle formé par GC, RB; c'est-à-dire, que BG à GC. Mais, comme BG est à GC, ainsi RC est EK. En effet, puisque CR est à CG comme le carré sur CR au carré sur CF ou au carré sur CE, et que d'autre part le carré sur CR, est au carré sur CE comme PR au diamètre PE; pour cette raison on aura CR à CG comme PR à PE. D'où le double de CR, c'est-à-dire CB, est à CG comme le double de PR est à PE, c'est-à-dire comme PR est à PA. Et, par partage, BG est à GC comme RA à AP, ou AE, c'est-à-dire, comme RC à EK, ce que nous disions. Et ainsi le rapport du cube RB au cube S, c'est-à-dire, le rapport RB à S élevé à la troisième puissance, est plus grand que celui de RC à EK. Mais nous avons montré que S est plus grand que l'arc EC. Donc à plus forte raison la troisième puissance du rapport RB ou RC à une droite égale à l'arc EC sera plus grand que celui de RC à EK. Mais, comme RC à l'arc EC, ainsi le périmètre du polygone BCDL, c'est-à-dire, la ligne Z, est à la circonférence du cercle BD; et comme RC à EK, ainsi le périmètre du polygone BCDL est au périmètre du polygone HKMN, c'est-à-dire, ainsi Z est à T. Donc la troisième puissance du rapport de Z à la circonférence entière BD sera aussi plus grande que celui de Z à T. Mais la troisième puissance du rapport de Z à X est égale au rapport de Z à T. Et ainsi le rapport de ce Z à la dite circonférence est plus grand que celui de Z à X. Et par conséquent la circonférence est plus petite que la droite X. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais on doit savoir que cette droite X est plus petite que les deux tiers de Z avec le tiers de T, c'est-à-dire, plus petite que les deux tiers du périmètre du polygone inscrit augmentés du tiers du circonscrit; la circonférence du cercle étant d'ailleurs plus petite que cela, d'après ce qui précède²⁷). Car $\frac{2}{3} Z$ avec $\frac{1}{3} T$ est égal à la plus petite des moyennes proportionnelles suivant une proportion arithmétique, laquelle est plus grande que la plus petite des moyennes proportionnelles suivant une proportion géométrique. Mais nous allons encore démontrer du polygone Y qu'il est plus grand que le cercle BD. Or, comme le rapport du polygone Y au polygone semblable HKMN est le carré de celui du périmètre au périmètre, et que le périmètre du polygone Y est égal à la droite V, et le périmètre HKMN égal à T, le rapport du polygone Y au polygone HKMN fera donc le carré de celui de V à T, c'est-à-dire, égal à celui de X à T. Mais, comme le polygone HKMN est au cercle BD, ainsi le périmètre de ce polygone, c'est-à-dire, la ligne T, est à la circonférence du cercle BD; parce que le polygone est égal au triangle ayant une base égale à son périmètre et comme hauteur le rayon AE, tandis que le cercle est égal à un triangle de même hauteur et dont la base est égale à la circonférence. Il résulte donc, en combinant ces proportions, que le polygone Y fera au cercle BD comme X est à la circonférence BD²⁸). Mais nous avons montré que X est plus grand que la circonférence BD. Donc le polygone Y fera aussi plus grand que le cercle BD. Ce qu'il fallait démontrer.

quoque major erit ratio cubi RB ad solidum sub rectangulo RBG in FC, quam cubi S ad cubum CF. Et permutando major ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG in FC ad cubum CF; hoc est, quam rectanguli RBG ad quadratum CF. Est autem quadrato CF æquale rectangulum GCR, hoc est, rectangulum sub GC, RB, quia proportionales sunt CR, CF, CG. Itaque major erit ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG ad rectangulum sub GC, RB, hoc est, quam BG ad GC. Sicut autem BG ad GC, ita RC ad EK. Quia enim est CR ad CG, ut quadratum CR ad quadratum CF seu quadratum CE: ut autem quadratum CR ad quadratum CE, ita est PR ad PE diametrum: Erit idecirco CR ad CG, ut PR ad PE. Unde dupla CR, hoc est, CB ad CG, ut dupla PR ad PE, hoc est, ut PR ad PA. Et dividendo, BG ad GC, ut RA ad AP, seu AE, hoc est, ut RC ad EK, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi RB ad cubum S, hoc est, ratio triplicata RB ad S, quam RC ad EK. Est autem S major ostensa arcu EC. Ergo omnino major erit ratio triplicata RB seu RC ad æqualem arcui EC, quam RC ad EK. Sicut autem RC ad arcum EC, ita est perimeter polygoni BCDL, hoc est, linea Z ad circumferentiam circuli BD; Et sicut RC ad EK, ita perimeter polygoni BCDL ad perimetrum polygoni HKMN, hoc est, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam BD, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem est rationi Z ad T. Itaque major est ratio ipsius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonstrandum.

Sciendum est autem ipsam X minorem esse duabus tertiis Z & triente T: hoc est, duabus tertiis perimetri polygoni inferipti & triente circumscripti, quibus aliqui minorem esse circuli circumferentiam constat ex præcedentibus ²⁷⁾. Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum secundum Arithmetice proportionem, quæ major est minore mediarum secundum proportionem Geometricam. Jam verò & de polygono Y demonstrabimus, ipsum videlicet circulo BD majus esse. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum simile HKMN rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. HKMN ipsi T, habebit proinde polygon. Y ad polyg. HKMN rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc est, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum HKMN ad circulum BD, ita est perimeter ipsius polygoni, hoc est, linea T ad circuli BD circumferentiam; quoniam polygonum æquale est triangulo basin habenti perimetro suæ æqualem & altitudinem radii AE, circulus autem æqualis ejusdem altitudinis triangulo cujus basis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum BD sicut X ad circumferentiam BD ²⁸⁾. Est autem X major ostensa quam BD circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo BD. Quod erat demonstrandum.

²⁷⁾ D'après la „Prop. IX”, p. 137. déjà citée plus haut.

²⁸⁾ Comparez la note 1, p. 115 du Tome présent.

Par là est manifeste l'erreur d'Oronce Fine²⁹⁾ qui prétendit que le quadrant d'un cercle est égal au plus petit des deux moyennes proportionnelles entre les côtés du carré inscrit et du carré circonscrit, et que le cercle est égal au carré formé au moyen du plus grand.

THÉOR. XII. PROPOS. XV.

Si entre le prolongement du diamètre d'un cercle et la circonférence on place une droite égale au rayon, et que cette droite prolongée coupe le cercle et rencontre la droite touchant le cercle à l'autre extrémité du diamètre: cette droite découpera de la tangente une partie plus grande que l'arc adjacent découpé³⁰⁾.

Soit décrit le cercle à centre C, dont le diamètre est AB. Prolongeons celui-ci du côté de A et plaçons entre lui et la circonférence une droite ED égale au rayon. Et supposons que cette droite prolongée coupe la circonférence en F, et rencontre en G la tangente, savoir celle qui touche le cercle à l'extrémité B du diamètre. Je dis que la tangente BG est plus grande que l'arc BF. Menons en effet par le centre la droite HL, parallèle à EG, qui rencontre la circonférence aux points H et M, et la tangente BG en L. Et joignons DH, qui coupe le diamètre en K. Alors les triangles EDK, CHK sont semblables, parce qu'ils ont les angles en K égaux, et l'angle E égal à l'angle C. Mais le côté ED est encore égal au côté HC, et ces côtés sont sous-tendus par des angles égaux. Par conséquent le côté DK est aussi égal au côté KH. Pour cette raison CA coupe DH en deux parties égales, et de même l'arc DAH. L'arc DH, ou l'arc FM qui lui est égal, est donc le double de l'arc AH. Mais l'arc MB est égal à l'arc AH. Donc l'arc FB sera le

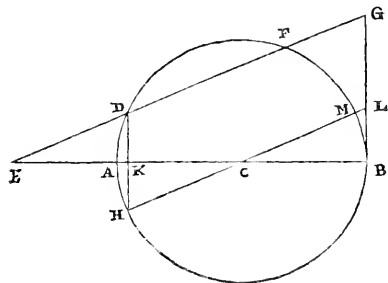
²⁹⁾ Oronce Fine, fils du médecin François Fine, naquit en 1494 à Briançon en Dauphiné. Il mourut le 8 octobre 1555 à Paris, où il jouissait d'une grande réputation comme professeur de mathématiques; réputation qui n'est pas confirmée par les ouvrages qu'il laissait. Il s'agit ici de l'ouvrage: „Orontii Finæi Delphinatis, Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris, Quadratura Circuli, tandem inuenta & clarissimè demonstrata. De circuli mensura & ratione circumferentiae ad diametrum, Demonstrationes duae. De multangularum omnium & regularium figurarum descriptione. Liber hactenus desideratus. De inveniendi longitudinis locorum differentia, aliter quam per Lunares eclipses, etiam dato quouis tempore, Liber admodum singularis. Planisphaerium geographicum, quo tum longitudinis atque latitudinis differentiae, tum directae locorum deprehenduntur elongationes. Lutetiae Parisiorum, Apud Simonem Colinaeum. 1544.” in Folio. Toutefois dans l'exemplaire qui nous a été prêté par la Bibliothèque de l'Université de Paris à la Sorbonne, on ne trouve (à la p. 13) que le second des deux théorèmes mentionnés par Huygens, c'est-à-dire, celui qui se rapporte à l'aire du cercle; mais il faut bien que dans d'autres exemplaires ou dans une autre édition le premier théorème a été ajouté. En effet, dans la réimpression par Nonius de l'ouvrage cité, laquelle parut en 1546 sous le titre: „De Erratis Orontii Finæi Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris”, on lit à la page 28: „His in hunc modum constructis ait Orontius quadratum bf, aequari inprimis ipsi dato circulo ah, ... praeterea quadratum eg, eidem circulo ah esse isoperimetrum,” où les

Ex his manifestus est Orontii Finci ²⁹⁾ error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportionem mediarum inter inscripti & circumscripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

Si inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum secet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangents arcu adjacente abscisso majorem ³⁰⁾.

Esto descriptus circulus centro C, cujus diameter AB. Hæc autem producatetur versus A, interque ipsam & circumferentiam ponatur ED recta radio



[Fig. 15.]

AC æqualis. Quæ producta secet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem BG majorem esse arcu BF. Ducatur enim per centrum recta HL parallela EG, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti verò BG in L. Et jungatur DH, quæ diametrum secet in K. Similes itaque sunt trianguli EDK, CHK, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed

& latus ED æquale est lateri HC, suntque hæc latera æqualibus angulis subtensa. Ergo æquale etiam latus DK lateri KH. Itaque CA secat bifariam ipsam DH, itemque arcum DAH. Arcus igitur DH live huic æqualis FM duplus est ad arcum AH. Ipsi autem AH æqualis est arcus MB. Igitur arcus FB triplus erit

carrés *bf* et *cg* sont les moyens proportionnels entre les carrés circonserit et inscrit du cercle *ah*. D'ailleurs ce n'est pas là ni la première, ni la dernière fausse quadrature dont Oronce Fine se rendit responsable. On en rencontre une autre au fol. 90 de son „Protomathesis” de 1532 et de nombreuses, différentes entre elles et d'avec celles signalées ici par Huygens, dans l'ouvrage posthume: „De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII. Quibus inter cætera. Circuli quadratura Centum modis, & supra, per eundem Orontium recenter exco-gitatis, demonstratur. Lutetiae Parisiorum, M.D.LVI. Ex officina Michaëlis Vascosani.”

³⁰⁾ Le théorème, identique avec la „Prop. XXIX” de Snellius, ne diffère pas essentiellement du „Theor. IX. Prop. IX”, p. 137 du Tome présent, auquel la démonstration le ramène. Il s'exprime donc par les deux premières formules de la note 10, p. 136.

* d'après 9.
ici³¹⁾.

triple de l'arc AH. Puis, comme HK est le sinus de l'arc HA et que LB est égal à la tangente de cet arc, les deux tiers de HK et le tiers de LB feront ensemble plus grands que l'arc AH*. De sorte que si l'on prend le triple de tout, le double de HK, c'est-à-dire, HD ou GL, ensemble avec LB fera plus grand que le triple de l'arc AH, c'est-à-dire que l'arc FB. Il paraît donc que la droite GB toute entière est plus grande que l'arc FB.

Ce théorème est le second des deux sur lesquels est basée toute la Cyclométrie de Willebrord Snellius, et que lui-même voulait paraître avoir démontré, au moyen d'un raisonnement qui contient une pure pétition de principe³²⁾. Mais nous démontrerons aussi l'autre théorème, parce qu'il est surtout utile et fort digne d'être considéré.

THÉOR. XIII. PROPOS. XVI.

Si au diamètre d'un cercle on ajoute dans la direction un demi-diamètre, et qu'à partir de l'extrémité de la droite ajoutée on mène une droite qui coupe le cercle, et rencontre la droite qui touche le cercle à l'extrémité opposée du diamètre; cette droite interceptera sur la tangente une partie plus petite que l'arc adjacent découpé³³⁾.

Soit un cercle [Fig. 16], dont le diamètre est AB; prolongeons celui-ci et supposons que AC est égal au demi-diamètre. Menons la droite CL, qui coupe la cir-

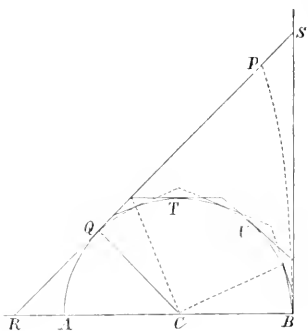
³¹⁾ Voir le dernier alinéa du „Theor. IX. Prop. IX”, p. 139.

³²⁾ Il s'agit de la „Propositio XXIX”, p. 43 de l'ouvrage cité dans la note 6, p. 94 du Tome présent, laquelle proposition est, en effet, conforme avec le théorème du texte et nous apprend que la droite GB de la figure 15 est plus grande que l'arc BF.

Pour le montrer Snellius s'occupe du lieu géométrique d'un point P qu'on choisit sur la droite EG de la figure 15 de manière que la droite BP est égale à l'arc BF et que l'angle EPB est un angle aigu. Or, Snellius prétend que ce lieu, qui évidemment doit passer par le point B se trouvera entièrement à gauche de la tangente BG, auquel cas on aura $BP < BG$. Mais pour

prouver cette assertion, il se borne à montrer que dans le cas particulier, où la droite EG touche le cercle, le point P se trouve en effet à gauche de la tangente. Ainsi le lieu cherché se compose d'une courbe qui de ce point P doit s'étendre au point B et il y a donc bien une certaine probabilité, mais aucune certitude, qu'elle restera en entier à gauche de la droite BG.

Quant au cas particulier que nous venons de mentionner, Snellius le traite dans sa „Propositio XXVI”, p. 40 de son ouvrage. Soit alors, dans la figure ci-jointe, Q le point dans lequel D et F de la figure 15 se sont rencontrés. L'arc QTUB est donc, puisque $QR = CQ$, la ³⁴⁾ partie de la circonférence du cercle et, comme la figure le montre, elle est plus petite que six des côtés d'un polygone circonscrit à seize côtés. Snellius n'a donc qu'à prouver que BS est plus grand que ces six côtés; ce qu'il a fait en effet.



ad arcum AH. Porro quoniam HK finis est arcus HA, ejusdemque tangenti æquatur LB, Erunt duæ tertiæ HK & triens LB simul majores arcu AH*. ^{per. 9. Inj. 31)} Quare sumptis omnium triplis erit dupla HK, hoc est, HD sive GL unâ cum LB major arcu AH triplo, hoc est, arcu FB. Apparet igitur totam GB arcu FB majorem esse.

Hoc Theorema alterum est ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonstrasse ipse videri voluit, argumentatione usus quæ meram quæsitæ petitionem continet³²⁾. Sed & alterum subjungemus, quod utile est imprimus & contemplatione dignissimum.

THEOR. XIII. PROPOS. XVI.

Si diametro circuli semidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur que circumulum secet, occurratque tangenti circumulum ad terminum diametri oppositum: Interceptiet ea partem tangents arcu adjacente abscisso minorem³³⁾.

³²⁾ Le théorème est, en effet, identique avec la „Proposition XXVIII”, p. 42, du „Cyclometricus” de Snellius.

Pour juger de son efficacité, en comparaison avec les théorèmes de Huygens, il nous faut supposer, en employant les notations de la note 10, p. 136, qu'on a EG (Fig. 16) = $\frac{1}{2} a_{2n}$.

Posant alors $\alpha = \text{arc EB} = 2\pi : 4n$, on trouve facilement:

$$LB = \frac{3}{2 + \cos \alpha} \cdot \frac{1}{2} a_{2n} = \frac{3 \sin \alpha}{4 \sin \alpha + \sin 2\alpha} \cdot a_{2n} = \frac{3a_{2n}^2}{4a_{2n} + a_n}.$$

On a donc, d'après le théorème:

$$\begin{aligned} 2\pi > \frac{1}{2} \frac{2n a_{2n}^2}{4a_{2n} + a_n} &= \frac{3p_{2n}^2}{2p_{2n} + p_n} = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) \cdot \frac{p_{2n}}{2p_{2n} + p_n} = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) \cdot \frac{3p_{2n}}{2p_{2n} + p_n} = \\ &= p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) \left\{ 1 + \frac{p_{2n} - p_n}{2p_{2n} + p_n} \right\} = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{1}{9} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} \cdot \frac{3p_{2n}}{2p_{2n} + p_n} = \\ &= p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{1}{9} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{9p_{2n}(2p_{2n} + p_n)} \right]. \end{aligned}$$

Comme on le voit, cette limite est du même ordre que celle, bien plus simple, indiquée par les „Theor. V et VII”, pp. 129 et 133 du Tome présent.

Quant à la démonstration que Snellius prétendait avoir donnée, elle souffre du même défaut que celle de sa „Propositio XXIX” (voir la note précédente). Cette fois encore il s'agit d'un lieu géométrique, c'est-à-dire, de celui décrit par un point P choisi sur la droite CL (Fig. 16) de manière qu'on ait BP = arc EB et que l'angle CPB soit un angle aigu. Dans le cas particulier où CL touche le cercle il est clair qu'on aura EL = EB = BL; donc BP = arc EB sera plus grand que BL et le point P devra se trouver à droite de la tangente LB. De la Snellius se hasarde à conclure que toute la courbe, qui constitue le lieu géométrique cherché et qui doit nécessairement passer par le point B, sera située à droite de la tangente BL; auquel cas on doit avoir, en effet, arc. BE = BP > BL.

Or, pour faire voir combien cette conclusion est fallacieuse, il suffit de remarquer que si l'on place le point C un peu plus près du point A, une partie de la courbe se trouvera, dans le voisinage du point B, à gauche de BL; comme cela résulte aisément de la considération de la note 37, qui suit.

conférence pour la seconde fois en E; et supposons qu'elle rencontre en L la tangente qui touche le cercle à l'extrémité du diamètre B. Je dis que la longueur interceptée BL est plus petite que l'arc BE. Joignons en effet AE, EB; puis, ayant porté AH égal à AE, menons HE et prolongeons cette droite, qui rencontre la tangente en K. Enfin menons EG à angles droits sur le diamètre AB, et ED perpendiculaire à la tangente BL. Puisque le triangle HAE est ainsi isocèle, les angles H et HEA feront égaux entr'eux. Mais comme l'angle AEB est droit, les deux angles HEA et KEB feront aussi égaux ensemble à un angle droit. Mais les deux angles H et HKB valent aussi un angle droit, parce que dans le triangle HKB l'angle B est droit. Donc enlevant de part et d'autre deux quantités égales, ici l'angle H, là l'angle HEA, il reste que les angles KEB, HKB sont égaux entr'eux. Le triangle KBE est donc isocèle, et ses côtés EB, BK sont égaux. Mais BD est égal à EG. Donc DK est la différence, dont BE dépasse EG. Ensuite, puisque AG est à AE comme AE à AB, les deux droites AG et AB vaudront ensemble plus que le double de AE*. Ainsi AE, c'est-à-dire, AH, est moindre que la moitié de la somme des deux droites AG, AB, c'est-à-dire, moindre que CA, augmenté de la moitié de AG. Par suite, si l'on retranche de part et d'autre CA, CH sera plus petit que la moitié de AG. Mais CA est plus grand que la moitié de AG. Donc, si l'on ajoute AC à AG, la ligne CG toute entière fera plus grande que le triple de CH. Mais, comme HG à GE, ainsi ED est à DK, et comme GE à GC, ainsi LD est à DE; on aura donc par la règle de la proportion dérangée³⁵⁾ que LD est à DK, comme HG est à GC. Et par conversion des rapports et par partage, DK est à KL comme GC est à CH. Donc aussi DK est plus grand que le triple de KL. Mais DK était l'excès de EB sur EG. Donc KL est plus petit que le tiers du dit excès. Or, KB est égal à cette corde EB. Donc KB avec KL, c'est-à-dire toute la droite LB est à plus forte raison moindre que l'arc BE*. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais, en considération du théorème précédent, il est clair qu'il n'est pas possible de prendre sur le prolongement du diamètre BA un autre point, qui soit moins distant du cercle que le point C et qui peut servir à la même propriété, savoir qu' en traçant CL on obtienne une tangente interceptée BL toujours plus petite que l'arc découpé BE³⁷⁾.

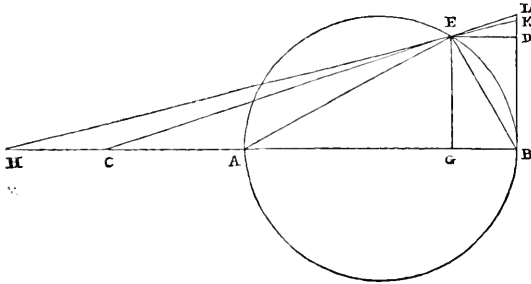
³⁴⁾ Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt." (Clavius, p. 518).

³⁵⁾ Voir la note 22, p. 304 du Tome XI.

³⁶⁾ Voir le dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII", p. 135 du Tome présent.

³⁷⁾ Soit, en effet, dans la figure 15, E un point choisi sur le prolongement de AB de manière que AE soit un peu plus petit que le rayon du cercle. Alors on peut tirer une droite ED égale à ce rayon, qui sera l'équivalent de la droite CL de la figure 16. Ainsi LB de cette dernière figure sera alors identique avec GB de la figure 15; mais on sait que, dans cette figure 15, GB est plus grand que l'arc FB; donc il en sera de même avec LB de la figure 16, c'est-à-dire,

Elto circulus, cujus diameter AB; quæ producatur, & fit AC femidiametro aequalis. Et ducatur recta CL, quæ circumferentiam secundo fecerit in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circumulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam BL arcu BE minorem esse. Jungantur enim AE, EB, positæque AL ipsi AE aequali ducatur HE & producatur, occurratque tangenti in K. Denique fit



[Fig. 16.]

EG diametro AB
ad angulos rectos,
ED verò tangenti
BL. Quoniam igitur
isofceles est trian-
gulus HAE, erunt
anguli inter se æqua-
les H & HEA. Quia
autem angulus AEB
rectus est, etiam
recto æquales erunt
duo simul HEA,
KEB. Verùm duo

quoque isti H & HKB uni recto æquantur, quoniam in triangulo HKB rectus est
 angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde
 angulo HEA, relinquentur inter se æquales anguli KEB, HKB. Triangulus igitur
 isosceles est KBE, ejusque latera æqualia EB, BK. Est autem BD æqualis
 EG. Ergo DK differentia est quâ BE excedit EG. Porro quoniam est AG
 ad AE, ut AE ad AB, erunt duæ simul AG, AB majores duplâ AE*. Ideo
 AE, hoc est, AH minor quam dimidia utriusque simul AG, AB; hoc
 est, minor quam CA cum dimidia AG. Quare ablata utrimque CA, erit
 CH minor dimidiâ AG. CA verò dimidiâ AG major est. Ergo si addatur AC
 ad AG, erit tota CG major quam tripla ipsius CH. Quia autem ut HG ad
 GE, ita est ED ad DK; ut autem GE ad GC, ita LD ad DE: Erit ex æquo
 in proportionem turbata³⁵⁾ ut HG ad GC, ita LD ad DK. Et per conversionem
 rationis & dividendo, ut GC ad CH, ita DK ad KL. Ergo etiam DK major
 quam tripla KL. Erat autem DK excessus EB supra EG. Ergo KL minor est
 triente dipti excessus. KB autem æqualis est ipsi EB subtenſe. Ergo KB uni cum
 KL, hoc est, tota LB omnino minor erit arcu BE*. Quod erat demonstrandum.

Perpenso autem Theoremate præcedenti, liquet non posse sumi punctum aliud in producta BA diametro, quod minus à circulo distet quam punctum C, eandemque servet proprietatem, ut nimirum ducta CL fiat tangens intercepta BL semper minor arcu abscisso BE ³⁷).

cette droite pourra surpasser l'arc EB, aussitôt que le point C est choisi sur AB à droite de sa position actuelle.

Puis l'usage de ce théorème est multiple, tant pour trouver les angles de triangles dont les côtés sont donnés, et cela sans le secours de tables, que pour trouver les côtés quand les angles sont donnés, ou encore pour déterminer la corde d'un arc de périphérie quelconque. Toutes ces questions ont été traitées assidûment et à fond par Snellius dans sa Cyclométrie³⁸⁾.

THÉORÈME XIV. PROPOS. XVII³⁹⁾.

Le centre de gravité d'un segment de cercle divise le diamètre de ce segment, de telle manière que la partie au sommet est plus grande que l'autre, et plus petite que une et demie fois cette autre.

Soit un segment de cercle ABC (mais supposons-le plus petit qu'un demi-cercle, parce que les autres ne satisfont pas à la proposition), et soit BD le diamètre du segment, qui est partagé en deux parties égales en E. Nous avons ainsi à démontrer d'abord que le centre de gravité du segment AB se trouve à partir du sommet B au-delà du point E; car nous avons montré ailleurs⁴⁰⁾ qu'il est situé sur le diamètre. Menons par E une droite parallèle à la base, qui rencontre de part et d'autre le cercle aux points F et G. Par ces points menons KI, HL, perpendiculaires à la base AC; ces droites forment, avec celle qui touche le segment au sommet, le rectangle KL. Puisque le segment est moindre qu'un demi-cercle, il est certain que la moitié FL du dit rectangle est contenue dans la figure AFGC, qui contient en outre les espaces AFI et LGC, mais que l'autre moitié KG du rectangle KL embrasse le segment FBG, ensemble avec les espaces FBK, BGH. Comme ces espaces sont tout entiers au-dessus de la droite FG, leur centre de gravité commun sera situé aussi au-dessus de cette même droite. Mais le point E sur cette droite est le centre de gravité de tout le rectangle KL. Donc le centre de gravité de l'espace restant BFILG sera sous la droite FG. Mais aussi le centre de gravité commun des espaces AFI, LGC est au-dessous de la même droite FG. Par conséquent, le centre de gravité de la grandeur formée par ces espaces et le dit espace BFILGB, c'est-à-dire, du segment ABC lui-même, doit nécessairement être trouvé au-dessous de la ligne FG, et par suite au-dessous du point E.

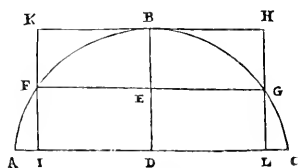
³⁸⁾ Voir dans l'„Appendicula, et Cyclometricæ usus” les problèmes V („Datis trianguli rectanguli lateribus ejus angulos invenire”) et VI („Datis trianguli rectanguli angulis oppositorum laterum rationem invenire”), p. 95—102 de l'ouvrage, cité dans la note 6. p. 94 du Tome présent; et de même aux p. 76—83 de cet ouvrage la „Propositio XXXVIII: Datae

Porrò usus hujus Theorematis multiplex est, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita sint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui subtensa assignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata sunt ³⁸⁾).

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII ³⁹⁾.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars que ad verticem reliquæ major sit, minor autem quam ejusdem sesquialtera.

Esto circuli portio ABC, (ponatur autem semicirculo minor, quoniam cæteræ ad propositum non faciunt) & diameter portionis sit BD, quæ bisariam secetur in E. Itaque ostendendum est primò centrum gravitatis portionis AB distare à vertice



[Fig. 17.]

B ultra punctum E; nam, quod in diametro situm sit, alibi ostendimus ⁴⁰⁾. Ducatur per E recta basi parallela, quæ utrinque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur KI, HL, basi AC ad angulos rectos, atque hæc cum ea, quæ portionem in vertice contingit, constituent rectangulum KL. Quoniam igitur portio semicirculo minor est, constat rectanguli dicti dimidium FL contineri

intra segmentum AFGC, atque insuper spatia quædam AFI, LGC. Alterum verò rectanguli KL semissem KG completi segmentum FBG unâ cum spatiis FBK, BGH. Quæ spatia quum sint tota supra rectam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum supra eandem situm erit. Est autem E punctum in ipsa FG centrum grav. totius rectanguli KL. Igitur spatii reliqui BFILGB centrum grav. erit infra rectam FG. Sed & spatiis AFI, LGC commune gravitatis centrum est infra eandem FG. Ergo magnitudinis ex spatiis hisce & dicto spatio BFILGB compositæ, quæ est portio ipsa ABC, centrum gravitatis infra lineam FG reperiri necesse est, ideoque infra E punctum.

cuicunque peripheriæ inscriptam veræ tam propinquam in numeris exhibere, quam erit ratio diametri ad suam peripheriam data".

³⁹⁾ Consultez, sur la partie de l'ouvrage présent qui commence avec cette proposition, les p. 97 et 98 de „l'Avertissement".

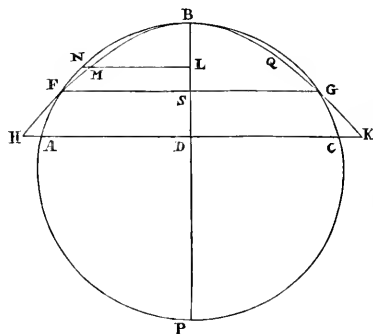
⁴⁰⁾ Voir le „Theorema IV" des „Theoremata de quadratura hyperbolæ, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro", p. 295 du Tome XI.

Supposons maintenant que le même diamètre soit divisé en S [Fig. 18], de telle manière que BS soit une et demie fois le reste SD. Je dis que le centre de gravité du segment ABC est moins distant du sommet que le point S. Soit, en effet, BDP le diamètre du cercle entier, et menons par S une droite parallèle à la base, qui rencontre la circonférence en F et G. Et imaginons une parabole dont le sommet est B, l'axe BD, et le paramètre égal à SP. Et qu'elle rencontre la base du segment en H et K. Puisqu' alors le carré sur FS est égal au rectangle BSP, c'est-à-dire, à celui formé par BS et le paramètre de la parabole, celle-ci passera par le point F et de même par G. Mais les parties BF, BG de la ligne parabolique tomberont à l'intérieur de la circonférence, et les autres FH, GK lui seront extérieures. Car cela se démontre en menant une ordonnée NL entre B et S, qui rencontre la circonférence en N, et la parabole en M. Or, puisque le carré sur NL est égal au rectangle BLP, tandis que le carré sur ML l'est au rectangle formé par les lignes BL, SP; et que le rectangle BLP est plus grand que celui formé par BL, SP: le carré sur NL fera plus grand que le carré sur ML, et la ligne NL plus grande que la ligne ML. Et la même chose arrive quel que soit le point entre B et S ou l'on applique l'ordonnée. Par conséquent, il est nécessaire que la partie BF de la circonférence soit toute entière à l'extérieur de la parabole, et pour la même raison la partie BG. D'autre part, puisque le rectangle BDP est égal au carré sur DA, et que le rectangle formé par BD, SP est égal au carré sur DH; HD fera plus grand que AD quant aux carrés, donc aussi en longueur. La même chose arrivera quel que soit l'endroit entre S et D où l'on place l'ordonnée. Par suite les parties FA et GC de la circonférence tombent à l'intérieur de la parabole. On obtient ainsi certains espaces FNBM et BQG, ainsi que d'autres HFA, GCK. Comme les derniers de ces espaces sont tout entiers au-dessous de la ligne FG, leur centre de gravité commun est aussi au-dessous de cette droite. Mais le centre de gravité du segment parabolique HBK est dans cette droite FG, savoir au point S*. Donc le centre de gravité de la partie restante AFMBQGC fera au-dessus de la droite FG. Mais il est clair que le centre de gravité des espaces FMBN, BQG est également situé au-dessus d'elle puisque ces espaces sont tout entiers au-dessus de cette droite FG. Donc on trouvera aussi au-dessus de la ligne FG le centre de gravité de l'espace formé par ces deux et AFMBQGC, c'est-à-dire du segment de cercle ABC; et comme ce centre est sur le diamètre BD, il sera moins distant du sommet B que le point S. Ce qu'il fallait démontrer.

* 3. livre 2. Archim., de le-
quipond. 11)

41) Voici cette Proposition telle qu'on la trouve p. 138 de l'édition de Bâle, mentionnée dans la note 3, p. 274 du T. XI: „Cuiuscunque portionis à recta linea & rectanguli coni sectione comprehensae, centrum grauitatis dividit diametrum portionis, ita ut pars eius ad verticem terminata, sit ad partem eam sequialtera, quae ad basim portionis terminatur”. (Heiberg, T. II, p. 213).

Idem verò diameter BD secetur nunc in S [Fig. 18], ita ut BS sit sesquialtera reliquæ SD. Dico centrum grav. portionis ABC minus distare à vertice B quam punctum S. Sit enim BDP totius circuli diameter. & ducatur per S recta basi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabolæ intelligatur cujus vertex B, axis BD, rectum verò latus æquale SP. Et occurrat basi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum FS æquale est rectangulo BSP, hoc est, ei quod sub BS & latere recto parabolæ continetur, transibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolice BF, BG intra circumferentiam cadent, sed reliquæ FH, GK erunt exteriores. Hoc enim ostenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ NL, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum NL æquale est rectangulo BLP, quadratum verò ML rectangulo contento



[Fig. 18.]

lineis BL, SP: rectangulum autem BLP majus eo quod sub BL, SP continetur: erit quadratum NL majus quadrato ML, & NL linea major quam ML. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ BF totam extra parabolam ferri necesse est, eademque ratione partem BG. Rursus quia rectangulum BDP æquale est quadrato DA; rectangulum verò sub BD, SP contentum quadrato DH; erit HD major quam AD potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ

FA, itemque GC intra parabolam cadent. Fiunt igitur spatia quædam FNB, & BQG, itemque alia HFA, GCK. Quorum hæc cum tota sint infra lineam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolice portionis HBK centrum grav. est in ipsa FG, nimirum S punctum*. Ergo partis reliquæ AFMBQGC centrum grav. erit supra rectam FG. Sed supra hanc situm quoque apparer centrum grav. spatiorum FMBN, BQG, quum tota sint supra ipsam FG. Ergo & spatii ex hisce duobus & AFMBQGC compositi, hoc est, portionis circuli ABC centrum grav. supra lineam FG reperietur: quumque sit in BD diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat ostendendum.

* 3. lib. 2. Archim. de Equipond. 11)

THÉOR. XV. PROPOS. XVIII.

Un segment de cercle plus petit qu'un demi-cercle est au triangle maximum inferit dans un rapport plus grand que quatre à trois; mais plus petit que celui de trois et un tiers fois le diamètre du segment restant au diamètre du cercle augmenté du triple de la droite qui, à partir du centre du cercle, atteint la base du segment⁴²⁾.

Soit un segment de cercle plus petit qu'un demi-cercle, dans lequel est inferit le triangle maximum ABC. Soit BD le diamètre du segment, et BF le diamètre du cercle dont le segment est découpé, E son centre. Je dois montrer d'abord que le rapport du segment ABC au triangle inferit est plus grand que quatre à trois. Soit G le centre de gravité du segment ABC, et coupons DF en H, de telle manière que HD soit le double du reste HF.

Alors, parce que FB est le double de EB, et que DB est plus petit que le double de GB⁴³⁾, le rapport de FB à BD fera plus grand que celui de EB à BG. Et par conversion des rapports le rapport de BF à FD sera moindre que celui de BE à EG⁴⁴⁾. Et en permutant, BF à BE (lequel rapport est de deux à un) est moindre que FD à EG. Donc FD est plus grand que le double de EG. Mais les deux tiers de cette FD font HD. Donc HD est plus grand que les quatre tiers de EG. Mais, comme HD est à EG, ainsi le segment ABC est au triangle inferit; car c'est ce que nous avons démontré antérieurement dans les Théorèmes sur la quadrature de l'Hyperbole, de l'Ellipse et du Cercle⁴⁵⁾. Donc le rapport de la portion au triangle inferit ABC est plus grand que de quatre à trois.

Mais nous allons démontrer maintenant que le segment est au triangle ABC dans un rapport moindre que celui de trois et un tiers fois DF au diamètre du cercle BF augmenté du triple de ED. Coupons le diamètre du segment en R, de telle façon que BR soit une fois et demie le reste RD. Le point R tombe donc entre G et D*, car nous avons supposé que G est le centre de gravité du segment ABC. Et puisque le rapport du segment au triangle inferit est le même que celui de HD à EG, comme nous venons de le dire, mais que le rapport de HD à EG est plus petit que celui de HD à ER, pour cette raison le rapport du segment au

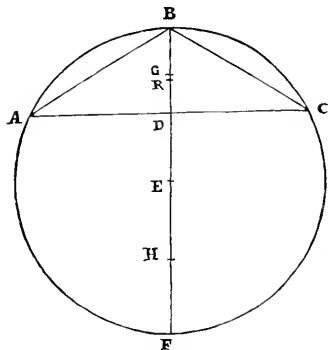
* d'après ce qui précède⁴⁶⁾.

⁴²⁾ La première partie de cette proposition n'est qu'une répétition du „Theor. III. Prop. III“, p. 123 du Tome présent; mais la seconde partie amène pour la limite supérieure une approximation plus forte, que celle fournie par le „Theor. IV. Prop. IV“, p. 127; ce qui résulte de la circonstance que le rapport dans lequel le point R, dont on fait usage dans la démonstration, divise BD, est égal à la limite du rapport $\frac{BG}{GD}$ pour des arcs de plus en plus petits.

THEOR. XV. PROPOS. XVIII.

Circuli portio femicirculo minor ad inscriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam sesquitertiam, minorem verò quam diameter portionis reliquæ tripla sesquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis basin ⁴³⁾.

Sit portio femicirculo minor, cui inscriptum triangulum maximum ABC. Diameter autem portionis sit BD; & diameter circuli à quo portio resecta est, BF, centrum E. Ostendendum est primò, portionis ABC ad triangulum inscriptum majorem esse rationem quam sesquitertiam. Estò portionis ABC centrum grav. punctum G, & secetur DF in H, ut sit HD dupla reliquæ HF.



[Fig. 19.]

Quoniam igitur FB est dupla EB; DB autem minor quam dupla GB ⁴³⁾. Erit major ratio FB ad BD, quam EB ad BG. Et per conversionem rationis, minor BF ad FD, quam BE ad EG ⁴⁴⁾. Et permutando minor BF ad BE, (quæ proportio dupla est) quam FD ad EG. Igitur FD major est quam dupla EG. Ipsi autem FD duas tertias continet HD. Ergo HD major est quam sesquitertia EG. Sicut autem HD ad EG, ita est portio ABC ad inscriptum sibi triangulum: hoc enim antehac demonstravimus in Theorematis de Hyperbolis Ellipsis & Circuli quadratura ⁴⁵⁾. Itaque major est ratio portionis ad inscriptum triangulum ABC quam sesquitertia.

Quod autem ad triangulum ABC portio minorem habeat rationem quam tripla sesquitertia ipsius DF ad diametrum circuli BF unà cum tripla ED, id nunc ostendemus. Secetur diameter portionis in R, ut BR sit sesquialtera reliquæ RD. Ergo cadit R punctum inter G & D* quoniam positum fuit G centrum gravitatis ^{* per præced.} in portione ABC. Quumque portionis ad inscriptum triangulum eadem sit ratio, quæ HD ad EG, ut modò dictum fuit; minor autem sit ratio HD ad EG, quam HD ad ER: Erit propterea minor quoque portionis ad inscriptum triangulum

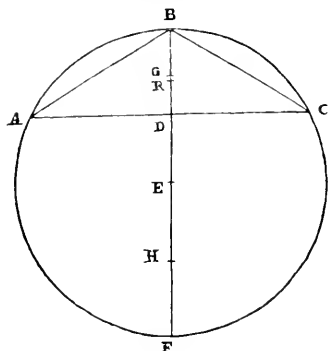
⁴³⁾ Voir la première partie du théorème précédent.

⁴⁴⁾ Voir la note 25, p. 151.

⁴⁵⁾ Voir le „Theorema VII” de la p. 305 du Tome XI.

⁴⁶⁾ Voir la seconde partie du théorème précédent.

triangle inferit fera aufli plus petit que celui de HD à ER, ou de HD prise cinq



[Fig. 19.]

fois au quintuple de ER. Or, HD (puif-
qu'il eft égal aux deux tiers de DF) pris
cinq fois fera égal aux dix tiers, c'eft-à-dire
à trois et un tiers fois DF. Mais ER, qui
fe compofe de ED et des deux cinquièmes
de DB, fi on le prend cinq fois, fera égal
au double de BD avec le quintuple de
ED, c'eft-a-dire, au double de toute la
droite EB et en plus le triple de ED. Il
paraît donc que le rapport du fegment ABC
au triangle inferit eft moindre que celui
de trois et un tiers fois DF au double
de EB, c'eft-à-dire au diamètre BF, aug-
menté du triple de ED. Ce qu'il falloit dé-
montrer.

THÉOR. XVI. PROPOS. XIX.

Un arc quelconque, plus petit qu'une demi-circonférence, eft plus grand que fa corde augmentée du tiers de la différence dont la corde dépaffe le finus. Mais un tel arc eft plus petit que la corde prise avec la droite qui eft au dit tiers comme le quadruple de la corde joint au finus eft au double de la corde avec le triple du finus⁴⁷⁾.

Soit un cercle dont le centre eft D, le diamètre FB. Et foit un arc BA plus petit que la demi-circonférence, auquel nous menons la corde BA et le finus AM; ce dernier eft donc à angles droits fur le diamètre FB. Enfuite, foit une droite GH égale à cette AM, et GI égale à la corde AB. L'excès eft donc HI, dont nous ajoutons le tiers IK à GI. Il faut montrer d'abord que l'arc AB eft plus grand que toute la droite GK. Or, cela eft manifefte d'après le théorème 7⁴⁸⁾. Mais fi l'on ajoute à GI la droite IO qui eft à IK, le tiers de HI, dans le même rapport que le quadruple de GI avec GH au double de GI avec le triple de GH; je dis que toute la droite GO eft plus grande que l'arc AB. Formons, en effet, fur les lignes GH, HI, IO des triangles dont le fommet commun eft L, et dont la hauteur foit égale au rayon DB. Et joignons DA, et menons le diamètre CE du cercle qui divife la droite AB en deux parties égales en N, et l'arc AB en E. Et joignons AE, EB.

⁴⁷⁾ La première partie eft identique avec le „Theor. V. Prop. V”. p. 129 du Tome préfent.

D'après la féconde partie on a, en employant toujours les notations de la note 10, p. 136,

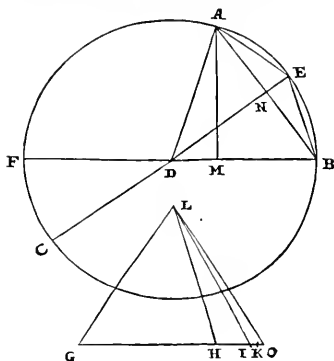
$$2\pi : 2n < a_{2n} + \frac{1}{3}(a_{2n} - \frac{1}{2}a_n) \frac{4a_{2n} + \frac{1}{2}a_n}{2a_{2n} + \frac{3}{2}a_n},$$

c'eft-à-dire:

ratio quam HD ad ER, five quam HD quinquies sumpta ad quintuplam ER. Atqui HD, (cum sit æqualis duabus tertiis DF) quinquies sumpta æquabitur decem tertiis, hoc est, triplæ sesquiterciæ DF. ER verò quæ continet ED & duas quintas ipsius DB, si quinquies sumatur, æquabitur duplæ BD & quintuplæ ED; hoc est, duplæ totius EB atque insuper triplæ ED. Igitur apparet portionem ABC ad inscriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam sesquiterciam DF ad duplam EB, hoc est, diametrum BF, unâ cum tripla ED. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XVI. PROPOS. XIX.

Arcus quilibet semicircumferentiâ minor, major est suâ subtensâ simul & triente differentie quâ subtensa sinum excedit. Idem verò minor quam subtensa simul cum ea quæ ad dictum trientem sese habeat, ut quadrupla subtensa juncta sinui ad subtensam duplam cum sinu triplo ⁴⁷).



[Fig. 20.]

HI, IO, triangula quorum communis vertex fit L, altitudo autem æqualis radio

Est circulus cujus D centrum, diameter FB. Et sit arcus BA femicircumferentia minor, cui subtensa ducatur BA, sinus autem AM: quæ nimirum diametro FB sit ad angulos rectos. Porro ipsi AM sit æqualis recta GH, & GI æqualis subtensæ AB. Excessus igitur est HI; cujus triens IK ipsi GI adjiciatur. Ostendendum est primò, arcum AB totâ GK majorem esse. Hoc autem ex Theoremate 7. est manifestum ⁴³⁾. At cum ipsi GI additur IO quæ ad IK trientem ipsius HI rationem habeat, quam quadrupla GI unâ cum GH ad duplam GI cum tripla GH. Dico totam GO arcu AB majorem esse. Constituantur enim super lineis GH, vertex sit L, altitudo autem æqualis radio

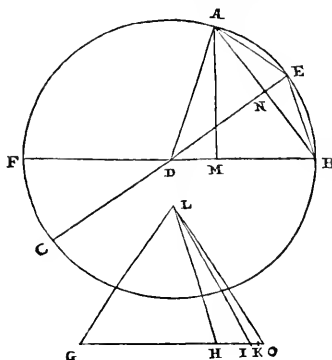
$$\begin{aligned} 2p < p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) \cdot \frac{4p_{2n} + p_n}{2p_{2n} + 3p_n} = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) \left\{ 1 + \frac{2(p_{2n} - p_n)}{2p_{2n} + 3p_n} \right\} = \\ = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} \left\{ 1 + \frac{3(p_{2n} - p_n)}{2p_{2n} + 3p_n} \right\} = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \\ + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} \left\{ 1 + \frac{3(p_{2n} - p_n)}{2p_{2n} + 3p_n} \right\} = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \\ + \frac{2}{15} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} + \left[\frac{6(p_{2n} - p_n)^4}{25p_{2n}^3(2p_{2n} + 3p_n)} \right]; \text{ expression dont les trois premiers termes corre-} \end{aligned}$$

spondent avec la suite (1) de la note 7, p. 94 du Tome présent.

⁴⁸⁾ Voir le dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII”, p. 135 du Tome présent.

Puisque OI est à IK comme le quadruple de GI avec GH est au double de GI avec le triple de GH , en prenant les triples des conséquents, OI sera à III (qui est notamment le triple de IK) comme le quadruple de GI avec GH est au sextuple de GI avec le nonuple de GH . Et, par composition, OH est à HI comme le décuple des deux droites IG , GH est au sextuple de IG avec le nonuple de GH ; ou bien, prenant les tiers, comme les dix tiers de la somme des deux droites GI , GH est au double de GI avec le triple de GH . Mais le rapport de la ligne GI à GH , c'est-à-dire, de BA à AM , est le même que celui de BD à DN , à cause des triangles semblables BAM , BDN . Donc aussi OH est à HI , comme $\frac{10}{3}$ de la somme des deux droites BD , DN est au double de BD avec le triple de DN , c'est-à-dire, comme $\frac{10}{3}$ NC est au diamètre EC avec le triple de DN . Mais plus petit que ce rapport est le rapport du segment AEB au triangle AEB^* . Donc le rapport du dit segment au dit triangle est aussi moindre que celui de OHI à III , c'est-à-dire, que celui du triangle OHL au triangle III . Mais le triangle III est égal au triangle AEB . C'est ce que l'on démontre de la manière suivante. Le triangle GHL est égal au triangle DAB , parce que leurs bases et leurs hauteurs sont réciproquement égales. Et pour une raison semblable, puisque GI est égal à la droite AB , le triangle GHL sera égal

* d'après ce qui précède.



[Fig. 20.]

à la somme des deux triangles DAE , DBE , c'est-à-dire au quadrilatère $DAEB$. Par conséquent il faut que le triangle III soit égal au triangle AEB , ce que nous démontrons. Le segment AEB sera donc au triangle AEB qui lui est inscrit dans un rapport moindre que le triangle OHL au même triangle AEB . Pour cette raison le triangle OHL sera plus grand que le segment AEB . Et dès lors le triangle OGL tout entier plus grand que le secteur $DAEB$. Mais la hauteur du triangle GLO est égale au rayon DB . Donc la base GO sera plus grande que l'arc AB . Ce qu'il fallait démontrer.

Or, il résulte évidemment de cela que de la circonférence toute entière on peut dire

que, si l'on inscrit dans le cercle deux polygones équilatéraux dont l'un a un nombre deux fois plus grand de côtés que l'autre, et que si l'on ajoute le tiers de la différence des périmètres au périmètre du polygone le plus grand, la droite ainsi composée sera plus petite que la circonférence du cercle. Mais si au même plus grand périmètre on ajoute une ligne qui est au dit tiers de la différence comme le quadruple du plus grand périmètre augmenté du plus petit périmètre est au double du plus grand avec le triple du plus petit, la droite ainsi composée dépassera la circonférence du cercle ⁴⁹).

DB. Et jungatur DA, ducaturque diameter circuli CE quæ rectam AB bifariam dividat in N, arcum verò AB in E. Et jungantur AE, EB.

Quoniam igitur OI est ad IK ut quadrupla GI unà cum GH ad duplam GI cum tripla GH; sumptis consequentium triplis erit OI ad III (hæc enim tripla est IK,) ut quadrupla GI unà cum GH ad sexcuplam GI cum noncupla GH. Et componendo, OII ad III, ut decupla utriusque IG, GII ad sexcuplam IG cum noncupla GH: vel sumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum simul GI, GII ad duplam GI cum tripla GH. Est autem eadem ratio linearum GI ad GII, hoc est, BA ad AM, quæ BD ad DN, propter similes triangulos BAM, BDN. Ergo etiam OII ad III, ut $\frac{1}{3}$ utriusque simul BD, DN ad duplam BD cum tripla DN; hoc est, ut $\frac{1}{3}$ NC ad diametrum EC cum tripla DN. Hac autem ratione minor est ratio portionis AEB ad AEB triangulum *. Ergo dictæ portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam OII ad III, hoc est, quam trianguli OIHL ad triangulum IHL. Triangulum autem IHL æquale est triangulo AEB. Quod sic ostenditur. Triangulum enim GHL æquale est triangulo DAB, quoniam bases & altitudines reciproce æquales habent. Similique ratione quoniam GI æqualis est rectæ AB, erit triangulum GIL æquale duobus simul triangulis DAE, DBE, hoc est, quadrilatero DAEB. Itaque triangulum IHL triangulo AEB æuari necesse est, quod dicebamus. Habebit itaque portio AEB ad triangulum sibi inscriptum AEB minorem quoque rationem quam triangulum OIHL ad idem triangulum AEB. Quamobrem triangulum OIHL portione AEB majus erit. Et totum proinde triangulum OGL majus fectore DAEB. Altitudo autem trianguli GLO æqualis est radio DB. Ergo basis GO major erit arcu AB. Quod erat ostendendum.

Ex his autem manifestum est de tota quoque circumferentia pronunciari posse, quod, *Si circulo inscribantur polygoni duo æquilatera, quorum alterum alterius sit duplo laterum numero, & differentie perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, composita ex his circuli circumferentiæ minor erit. Eidem verò majori perimetro si linea addatur quæ ad dictum differentie trientem sese habeat, sicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, composita circumferentiæ circuli excedet* ⁴⁹⁾.

⁴⁹⁾ Voir la seconde formule de la note 47.

PROBLÈME IV. PROPOS. XX.

Trouver le rapport de la circonférence au diamètre ; et au moyen des cordes données inscrites dans un cercle donné trouver la longueur des arcs auxquels elles sont sous-tendues.

Soit un cercle de centre D, dont le diamètre est CB, et soit l'arc BA un sextant de la circonférence, dont nous menons la corde AB, ainsi que le sinus AM. Si nous supposons donc que le demi-diamètre DB est de 100000 parties, la corde BA en contiendra le même nombre. Mais AM se composera de 86603 parties, et pas une de moins (ce qui veut dire que si l'on enlevait une partie ou une unité des 86603 on aurait moins que le dû)⁵⁰⁾, puisqu'elle est la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.

De là l'excès de AB sur AM devient 13397, moindre que le vrai. Le tiers en est $4465 \frac{2}{3}$, ce qui ajouté à AB 100000, donne $104465 \frac{2}{3}$ parties, ce qui est moins que l'arc AB. Et ceci est une première limite inférieure; dans la suite nous en trouverons une autre, plus rapprochée que celle-là de la vraie valeur. Mais d'abord nous devons chercher aussi une limite supérieure, conformément au théorème précédent.

Il y a donc trois nombres auxquels il s'agit de trouver une quatrième proportionnelle. Le premier est égal au double des parties de AB et au triple de AM; il sera donc 459807, moindre que le vrai, (car on doit aussi prendre soin que ce nombre soit moindre ici; et de même avec les autres de la manière que nous l'indiquerons); le second est égal au quadruple de AB et au simple AM, soit 486603, plus grand que le vrai. Et le troisième est le tiers de l'excès de AB sur AM, 4466, plus grand que le vrai. La quatrième proportionnelle sera donc 4727, plus grande que le vrai, ce qui, ajouté à AB ou 100000 donne 104727, plus grand que le nombre de parties que contient l'arc AB, sextant de la périphérie*. Nous avons donc déjà trouvé la longueur de l'arc AB d'après une limite inférieure et une supérieure, dont cependant la dernière est de beaucoup la plus rapprochée de la vraie valeur, car le nombre 104719 est le plus voisin du vrai.

Mais au moyen de ces deux là nous obtiendrons une autre limite inférieure plus exacte que la première, en faisant usage du précepte suivant, qui résulte d'un examen plus précis du centre de gravité⁵¹⁾.

* d'après ce qui précède.

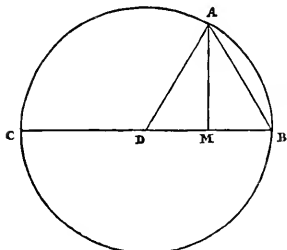
⁵⁰⁾ La phrase entre parenthèses a été ajoutée par Huygens en marge de l'exemplaire que nous possédons.

⁵¹⁾ Les manuscrits et les lettres ne donnent aucun renseignement décisif sur la manière dont la

PROBLEMA IV. PROPOS. XX.

Circumferentie ad diametrum rationem investigare; & ex datis inscriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illae subtenduntur.

Esto circulus centro D, cujus diameter CB, & sit arcus BA sextans circumferentie, cui subtensa ducatur AB, itemque sinus AM. Posita igitur DB semidiametro partium 100000, totidem quoque erit subtensa BA. AM verò partium 86603 non unâ minùs, (hoc est, si una pars sive unitas auferratur ab 86603 fiet minor debito) ⁵⁰), quippe semiffis lateris trianguli æquilateri circulo inscripti.



[Fig. 21.]

Hinc excessus AB supra AM sit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipsi AB 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu AB. Et hic primus est minor terminus, quo postea alium vero propiorem inveniemus. Priùs autem major quoque terminus secundùm Theorema præcedens inquirendus est.

Tres nimirum sunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus est partium duplæ AB & triplæ AM qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque observandum ut minor sit, idemque in cæteris prout dicitur) secundus quadruplæ AB & simplæ AM qui 486603 vero maj. Et tertius triens excessus AB supra AM, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad AB 100000 fit 104727, major numero partium, quas continet arcus AB, peripheriæ sextans *. Jam igitur invenimus longitudinem arcus AB secundùm minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longè propior vero est, cum vero proximus sit 104719.

* per præced.

Sed ex utroque istorum alius minor terminus habebitur priore accuratior si utamur præcepto sequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inspectione dependet ⁵¹).

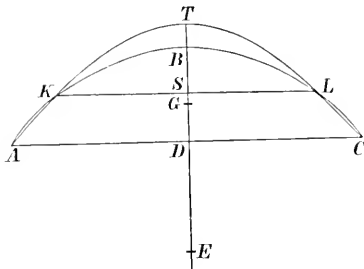
règle qui va suivre a été obtenue. Nous savons seulement par la Lettre N^o. 185 du 1^{er} avril 1654 (p. 279 du T. I) que sa démonstration dépendait, comme celle de la seconde partie du Théorème XVI^e, de l'emploi d'une parabole.

Il étoit donc à supposer que la règle en question s'obtiendrait suivant la voie indiquée par les Théorèmes XIV et XV, en remplaçant toutefois la parabole HBK de la figure 18 par une autre

* Direct. p. 185 a. 185 b. 185 c. 185 d. 185 e. 185 f. 185 g. 185 h. 185 i. 185 j. 185 k. 185 l. 185 m. 185 n. 185 o. 185 p. 185 q. 185 r. 185 s. 185 t. 185 u. 185 v. 185 w. 185 x. 185 y. 185 z. 185 aa. 185 ab. 185 ac. 185 ad. 185 ae. 185 af. 185 ag. 185 ah. 185 ai. 185 aj. 185 ak. 185 al. 185 am. 185 an. 185 ao. 185 ap. 185 aq. 185 ar. 185 as. 185 at. 185 au. 185 av. 185 aw. 185 ax. 185 ay. 185 az. 185 ba. 185 bb. 185 bc. 185 bd. 185 be. 185 bf. 185 bg. 185 bh. 185 bi. 185 bj. 185 bk. 185 bl. 185 bm. 185 bn. 185 bo. 185 bp. 185 bq. 185 br. 185 bs. 185 bt. 185 bu. 185 bv. 185 bw. 185 bx. 185 by. 185 bz. 185 ca. 185 cb. 185 cc. 185 cd. 185 ce. 185 cf. 185 cg. 185 ch. 185 ci. 185 cj. 185 ck. 185 cl. 185 cm. 185 cn. 185 co. 185 cp. 185 cq. 185 cr. 185 cs. 185 ct. 185 cu. 185 cv. 185 cw. 185 cx. 185 cy. 185 cz. 185 da. 185 db. 185 dc. 185 dd. 185 de. 185 df. 185 dg. 185 dh. 185 di. 185 dj. 185 dk. 185 dl. 185 dm. 185 dn. 185 do. 185 dp. 185 dq. 185 dr. 185 ds. 185 dt. 185 du. 185 dv. 185 dw. 185 dx. 185 dy. 185 dz. 185 ea. 185 eb. 185 ec. 185 ed. 185 ee. 185 ef. 185 eg. 185 eh. 185 ei. 185 ej. 185 ek. 185 el. 185 em. 185 en. 185 eo. 185 ep. 185 eq. 185 er. 185 es. 185 et. 185 eu. 185 ev. 185 ew. 185 ex. 185 ey. 185 ez. 185 fa. 185 fb. 185 fc. 185 fd. 185 fe. 185 ff. 185 fg. 185 fh. 185 fi. 185 fj. 185 fk. 185 fl. 185 fm. 185 fn. 185 fo. 185 fp. 185 fq. 185 fr. 185 fs. 185 ft. 185 fu. 185 fv. 185 fw. 185 fx. 185 fy. 185 fz. 185 ga. 185 gb. 185 gc. 185 gd. 185 ge. 185 gf. 185 gg. 185 gh. 185 gi. 185 gj. 185 gk. 185 gl. 185 gm. 185 gn. 185 go. 185 gp. 185 gq. 185 gr. 185 gs. 185 gt. 185 gu. 185 gv. 185 gw. 185 gx. 185 gy. 185 gz. 185 ha. 185 hb. 185 hc. 185 hd. 185 he. 185 hf. 185 hg. 185 hh. 185 hi. 185 hj. 185 hk. 185 hl. 185 hm. 185 hn. 185 ho. 185 hp. 185 hq. 185 hr. 185 hs. 185 ht. 185 hu. 185 hv. 185 hw. 185 hx. 185 hy. 185 hz. 185 ia. 185 ib. 185 ic. 185 id. 185 ie. 185 if. 185 ig. 185 ih. 185 ii. 185 ij. 185 ik. 185 il. 185 im. 185 in. 185 io. 185 ip. 185 iq. 185 ir. 185 is. 185 it. 185 iu. 185 iv. 185 iw. 185 ix. 185 iy. 185 iz. 185 ja. 185 jb. 185 jc. 185 jd. 185 je. 185 jf. 185 jg. 185 jh. 185 ji. 185 jj. 185 jk. 185 jl. 185 jm. 185 jn. 185 jo. 185 jp. 185 jq. 185 jr. 185 js. 185 jt. 185 ju. 185 jv. 185 jw. 185 jx. 185 jy. 185 jz. 185 ka. 185 kb. 185 kc. 185 kd. 185 ke. 185 kf. 185 kg. 185 kh. 185 ki. 185 kj. 185 kl. 185 km. 185 kn. 185 ko. 185 kp. 185 kq. 185 kr. 185 ks. 185 kt. 185 ku. 185 kv. 185 kw. 185 kx. 185 ky. 185 kz. 185 la. 185 lb. 185 lc. 185 ld. 185 le. 185 lf. 185 lg. 185 lh. 185 li. 185 lj. 185 lk. 185 ll. 185 lm. 185 ln. 185 lo. 185 lp. 185 lq. 185 lr. 185 ls. 185 lt. 185 lu. 185 lv. 185 lw. 185 lx. 185 ly. 185 lz. 185 ma. 185 mb. 185 mc. 185 md. 185 me. 185 mf. 185 mg. 185 mh. 185 mi. 185 mj. 185 mk. 185 ml. 185 mm. 185 mn. 185 mo. 185 mp. 185 mq. 185 mr. 185 ms. 185 mt. 185 mu. 185 mv. 185 mw. 185 mx. 185 my. 185 mz. 185 na. 185 nb. 185 nc. 185 nd. 185 ne. 185 nf. 185 ng. 185 nh. 185 ni. 185 nj. 185 nk. 185 nl. 185 nm. 185 nn. 185 no. 185 np. 185 nq. 185 nr. 185 ns. 185 nt. 185 nu. 185 nv. 185 nw. 185 nx. 185 ny. 185 nz. 185 oa. 185 ob. 185 oc. 185 od. 185 oe. 185 of. 185 og. 185 oh. 185 oi. 185 oj. 185 ok. 185 ol. 185 om. 185 on. 185 oo. 185 op. 185 oq. 185 or. 185 os. 185 ot. 185 ou. 185 ov. 185 ow. 185 ox. 185 oy. 185 oz. 185 pa. 185 pb. 185 pc. 185 pd. 185 pe. 185 pf. 185 pg. 185 ph. 185 pi. 185 pj. 185 pk. 185 pl. 185 pm. 185 pn. 185 po. 185 pp. 185 pq. 185 pr. 185 ps. 185 pt. 185 pu. 185 pv. 185 pw. 185 px. 185 py. 185 pz. 185 qa. 185 qb. 185 qc. 185 qd. 185 qe. 185 qf. 185 qg. 185 qh. 185 qi. 185 qj. 185 qk. 185 ql. 185 qm. 185 qn. 185 qo. 185 qp. 185 qq. 185 qr. 185 qs. 185 qt. 185 qu. 185 qv. 185 qw. 185 qx. 185 qy. 185 qz. 185 ra. 185 rb. 185 rc. 185 rd. 185 re. 185 rf. 185 rg. 185 rh. 185 ri. 185 rj. 185 rk. 185 rl. 185 rm. 185 rn. 185 ro. 185 rp. 185 rq. 185 rr. 185 rs. 185 rt. 185 ru. 185 rv. 185 rw. 185 rx. 185 ry. 185 rz. 185 sa. 185 sb. 185 sc. 185 sd. 185 se. 185 sf. 185 sg. 185 sh. 185 si. 185 sj. 185 sk. 185 sl. 185 sm. 185 sn. 185 so. 185 sp. 185 sq. 185 sr. 185 ss. 185 st. 185 su. 185 sv. 185 sw. 185 sx. 185 sy. 185 sz. 185 ta. 185 tb. 185 tc. 185 td. 185 te. 185 tf. 185 tg. 185 th. 185 ti. 185 tj. 185 tk. 185 tl. 185 tm. 185 tn. 185 to. 185 tp. 185 tq. 185 tr. 185 ts. 185 tt. 185 tu. 185 tv. 185 tw. 185 tx. 185 ty. 185 tz. 185 ua. 185 ub. 185 uc. 185 ud. 185 ue. 185 uf. 185 ug. 185 uh. 185 ui. 185 uj. 185 uk. 185 ul. 185 um. 185 un. 185 uo. 185 up. 185 uq. 185 ur. 185 us. 185 ut. 185 uu. 185 uv. 185 uw. 185 ux. 185 uy. 185 uz. 185 va. 185 vb. 185 vc. 185 vd. 185 ve. 185 vf. 185 vg. 185 vh. 185 vi. 185 vj. 185 vk. 185 vl. 185 vm. 185 vn. 185 vo. 185 vp. 185 vq. 185 vr. 185 vs. 185 vt. 185 vu. 185 vv. 185 vw. 185 vx. 185 vy. 185 vz. 185 wa. 185 wb. 185 wc. 185 wd. 185 we. 185 wf. 185 wg. 185 wh. 185 wi. 185 wj. 185 wk. 185 wl. 185 wm. 185 wn. 185 wo. 185 wp. 185 wq. 185 wr. 185 ws. 185 wt. 185 wu. 185 wv. 185 ww. 185 wx. 185 wy. 185 wz. 185 xa. 185 xb. 185 xc. 185 xd. 185 xe. 185 xf. 185 xg. 185 xh. 185 xi. 185 xj. 185 xk. 185 xl. 185 xm. 185 xn. 185 xo. 185 xp. 185 xq. 185 xr. 185 xs. 185 xt. 185 xu. 185 xv. 185 xw. 185 xx. 185 xy. 185 xz. 185 ya. 185 yb. 185 yc. 185 yd. 185 ye. 185 yf. 185 yg. 185 yh. 185 yi. 185 yj. 185 yk. 185 yl. 185 ym. 185 yn. 185 yo. 185 yp. 185 yq. 185 yr. 185 ys. 185 yt. 185 yu. 185 yv. 185 yw. 185 yx. 185 yy. 185 yz. 185 za. 185 zb. 185 zc. 185 zd. 185 ze. 185 zf. 185 zg. 185 zh. 185 zi. 185 zj. 185 zk. 185 zl. 185 zm. 185 zn. 185 zo. 185 zp. 185 zq. 185 zr. 185 zs. 185 zt. 185 zu. 185 zv. 185 zw. 185 zx. 185 zy. 185 zz.

Ajoutez les quatre tiers de la différence des limites trouvées au double de la corde et au triple du sinus, et que dans le même rapport dans lequel se trouve la droite ainsi composée à trois et un tiers, ou $\frac{10}{3}$ fois la somme du sinus et de la corde, se trouve aussi l'excès de la corde sur le sinus à une certaine autre droite; celle-ci ajoutée au sinus constituera une droite plus petite que l'arc ⁵²⁾.

dont le centre de gravité se trouverait nécessairement au dessus de celui du segment de cercle.



Or, la parabole qui, mieux qu'aucune autre, peut servir à ce but est celle ATC tracée dans la figure ci-jointe, où $DS = \frac{2}{3} TD$. Elle permet de conclure qu'on a $DG < DS$, où G et S représentent les centres de gravité du segment de cercle et de la parabole.

En effet, il est clair d'abord qu'une parabole passant par les points A et C est plus efficace que toute autre, qui passe par les mêmes points K et L et dont la partie au dessous de KL se trouverait entièrement à l'intérieur du segment de cercle (ce qui est nécessaire pour la démonstration); puisque pour ces dernières paraboles TD, donc aussi la distance du centre

de gravité à la base AC, sera plus grande que pour la première.

Ensuite on voit aisément qu'on ne peut pas prendre les points K et L, avec avantage, ni plus bas, ni plus haut que dans la figure. En les prenant plus bas la distance du centre de gravité de la parabole à la base s'agrandit avec TD. En les prenant plus haut il est vrai que cette distance s'amoindrit; mais alors le centre de gravité de la parabole se trouve au dessous de la droite KL et on n'est plus sûr qu'il est encore au dessus du centre de gravité G du segment de cercle.

Il s'agit donc de calculer la limite inférieure pour la longueur de l'arc, et ensuite pour 2π , à laquelle on est conduit en employant la parabole de la figure. Nous avons trouvé ainsi la formule:

$$2\pi > p_n + \frac{10(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \frac{27(p_{2n} - p_n)^2}{6p_{2n} + 9p_n}},$$

pour la déduction de laquelle nous renvoyons à un article de notre collaborateur M. F. Schuh à paraître dans les Archives Néerlandaises sous le titre: „Sur quelques formules approximatives de la circonférence du cercle et sur la Cyclométrie de Huygens.”

Or, en comparant cette limite avec celle qui suit de la règle de Huygens (voir la note 52), on s'aperçoit qu'elle est moins rapprochée; mais puisqu'elle est la meilleure de cette forme qu'on peut obtenir par le procédé que nous avons décrit, il faut que Huygens ait suivi une autre voie; si, du moins, il n'y pas question d'une faute de calcul.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ces approximations à propos d'une pièce de 1668 composée par Huygens pendant sa polémique avec Gregory sur la quadrature du cercle. Dans cette pièce, qu'on trouve aux pages 61—64 des „Adversaria olim D”, Huygens arrive par une méthode différente à une formule, qui conduit à l'inégalité:

$$2\pi > p_n + \frac{10(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \frac{3(p_{2n} - p_n)^2}{5p_{2n} + 5p_n}}.$$

Inventorum terminorum differentia sesquiertia jungatur duple subtensae & finis triplo, & quam rationem habet ex his composita ad triplam sesquiertiam seu $\frac{1}{3}$ utriusque simul, finis, subtensaeque, eandem habeat subtensae supra finem excessus ad aliam quandam; Haec ad finem addita rectam constituet arcu minorem ⁵²).

c'est-à-dire, qui donne une limite inférieure plus rapprochée que les autres; puisqu'on a :

$$5p_{2u} + 5p_n^2 = 10p_{2u} + 10p_n < 6p_{2u} + 9p_n < 6p_{2u} + 9p_n^2.$$

⁵²) On trouve pour la différence des limites indiquées dans le Théorème XVI l'expression :

$$\frac{1}{3}(a_{2u} - \frac{1}{2}a_n) - \frac{2}{2} \frac{a_{2u} - a_n}{a_{2u} + \frac{3}{2}a_n}.$$

La règle en question conduit donc à l'inégalité :

$$\frac{2\pi}{2u} > \frac{1}{2}a_n + \frac{\frac{1}{3}(a_{2u} - \frac{1}{2}a_n)}{\frac{1}{2}(a_{2u} - \frac{1}{2}a_n) + \frac{2}{2} \frac{a_{2u} - a_n}{a_{2u} + \frac{3}{2}a_n}};$$

d'où l'on peut déduire :

$$2\pi > p_n + \frac{10(p_{2u}^2 - p_n^2)}{6p_{2u} + 9p_n + \frac{8(p_{2u} - p_n)^2}{6p_{2u} + 9p_n}}.$$

Pour pouvoir comparer cette limite inférieure avec la suite (1) de la note 7, p. 94 du Tome présent, nous écrivons successivement :

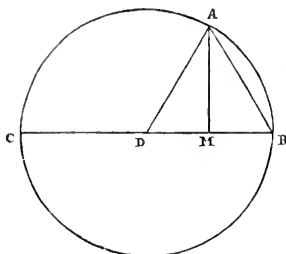
$$\begin{aligned} 2\pi &> p_{2u} - (p_{2u} - p_n) + \frac{60p_{2u}^2 + 150p_{2u}p_n + 90p_n^2}{44p_{2u}^2 + 92p_{2u}p_n + 89p_n^2} (p_{2u} - p_n) = p_{2u} + \\ &+ \frac{16p_{2u}^2 + 58p_{2u}p_n + p_n^2}{44p_{2u}^2 + 92p_{2u}p_n + 89p_n^2} (p_{2u} - p_n) = p_{2u} + \frac{1}{3}(p_{2u} - p_n) \left[1 + \right. \\ &+ \frac{(4p_{2u} + 36p_n)(p_{2u} - p_n)}{44p_{2u}^2 + 92p_{2u}p_n + 89p_n^2} \left. \right] = p_{2u} + \frac{1}{3}(p_{2u} - p_n) + \frac{1}{15} \frac{(p_{2u} - p_n)^2}{p_{2u}} \times \\ &\times \frac{10p_{2u}^2 + 215p_{2u}p_n}{44p_{2u}^2 + 92p_{2u}p_n + 89p_n^2} = p_{2u} + \frac{1}{3}(p_{2u} - p_n) + \frac{1}{15} \frac{(p_{2u} - p_n)^2}{p_{2u}} \left[1 + \right. \\ &+ \frac{(-34p_{2u} + 89p_n)(p_{2u} - p_n)}{44p_{2u}^2 + 92p_{2u}p_n + 89p_n^2} \left. \right] = p_{2u} + \frac{1}{3}(p_{2u} - p_n) + \frac{1}{15} \frac{(p_{2u} - p_n)^2}{p_{2u}} + \\ &+ \frac{2}{675} \frac{(p_{2u} - p_n)^3}{p_{2u}^2} + \frac{2}{675} \frac{(p_{2u} - p_n)^3}{p_{2u}^2} \left[-1 + \frac{1}{15} \frac{(-34p_{2u} + 89p_n)(p_{2u} - p_n)}{44p_{2u}^2 + 92p_{2u}p_n + 89p_n^2} \right] = p_{2u} + \\ &+ \frac{1}{3}(p_{2u} - p_n) + \frac{1}{15} \frac{(p_{2u} - p_n)^2}{p_{2u}} + \frac{2}{675} \frac{(p_{2u} - p_n)^3}{p_{2u}^2} - \left[\frac{2}{675} \frac{(2014p_{2u} - 979p_n)(p_{2u} - p_n)^4}{(44p_{2u}^2 + 92p_{2u}p_n + 89p_n^2)p_{2u}^2} \right] \end{aligned}$$

Ajoutons que la limite, mentionnée dans la note précédente, comme empruntée à la pièce de 1668, amène l'inégalité :

$$\begin{aligned} 2\pi &> p_{2u} + \frac{1}{3}(p_{2u} - p_n) + \frac{1}{15} \frac{(p_{2u} - p_n)^2}{p_{2u}} + \frac{1}{75} \frac{(p_{2u} - p_n)^3}{p_{2u}^2} + \\ &+ \left[\frac{1}{75} \frac{(-p_{2u} + 16p_n)(p_{2u} - p_n)^4}{(11p_{2u}^2 + 23p_{2u}p_n + 16p_n^2)p_{2u}^2} \right]. \end{aligned}$$

Des deux inégalités les trois premiers termes s'accordent avec ceux de la suite en question; mais le quatrième terme de la seconde se rapproche de beaucoup plus du quatrième terme de la suite, tout en y restant inférieur comme il fallait.

La limité inférieure était $104465\frac{2}{3}$; la supérieure 104727 ; leur différence est $261\frac{1}{3}$. Nous devons de nouveau trouver une quatrième proportionnelle à trois



[Fig. 21.]

nombre. Le premier est le double des parties de AB augmenté du triple de AM et des quatre tiers de la différence des limites; on trouve 460158 , plus grand que le vrai. Le second est les $\frac{1}{3}$ des deux AB et AM ensemble, 622008 , plus petit que le vrai. Enfin le troisième est l'excès de AB sur AM, 13397 , plus petit que le vrai. La quatrième proportionnelle à ces nombres est 18109 , plus petite que le vrai. Si donc nous ajoutons ceci au nombre de parties de AM, $86602\frac{1}{2}$, moindre que le vrai, il vient $104711\frac{1}{2}$, moindre que l'arc AB. Ainsi donc le sextuple de ces parties, 628269 , sera plus petit

que la circonférence toute entière. Mais parce que 104727 de ces parties ont été trouvées plus grandes que l'arc AB, leur sextuple 628362 sera plus grand que la circonférence. De sorte que le rapport de la circonférence au diamètre est plus petit que celui de 628362 , et plus grand que celui de 628269 à 200000 . Ou bien plus petit que 314181 et plus grand que 314135 à 100000 . D'où résulte que ce rapport est certainement plus petit que $3\frac{1}{2}$ et plus grand que $3\frac{1}{2}\frac{9}{10}$. Et par là aussi est réfutée l'erreur de Longomontanus⁵³), qui écrivit que la périphérie est plus grande que 314182 ⁵⁴) parties, dont le rayon contient 100000 .

Supposons maintenant que l'arc AB soit $\frac{1}{8}$ de la circonférence; alors AM, moitié du côté du carré inscrit dans le cercle, sera de 7071068 parties, dont le rayon DB en contient 10000000 , et pas une de moins. Tandis que AB, côté de l'octogone, est de 7653668 parties et pas une de plus. Au moyen de ces données on trouvera, de la même façon que ci-devant, comme première limite inférieure de la longueur de l'arc AB 7847868 . Puis comme limite supérieure 7854066 . Et de ces deux là de nouveau une limite inférieure plus précise 7853885 . D'où il résulte que le rapport de la périphérie au diamètre est moindre que $31416\frac{1}{3}$ et plus grand que 31415 sur 10000 .

Et comme la limite supérieure 7854066 s'écarte moins de la vraie longueur de l'arc que 85 parties (l'arc AB, en effet, d'après ce que nous avons prouvé plus haut⁵⁵), est plus grand que 7853981), et que 85 parties font moins que deux secondes, c'est-à-dire que $\frac{1}{12500000}$ de la circonférence, car toute la circonférence a plus de 60000000 de ces parties; il est donc clair que, si d'un triangle rectangle nous cherchons les angles au moyen des côtés donnés, de la manière dont nous avons cherché cette limite supérieure un peu avant, jamais nous ne nous trompe-

⁵³) Voir, sur Longomontanus et son ouvrage de 1644 sur la quadrature du cercle, les notes 4 et 5,

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727 . differentia horum est $261\frac{1}{3}$. Estque rursus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus est partium duplæ AB & triplæ AM & sesquiertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{2}{3}$ utriusque simul AB, AM, 622008 vero minor. Tercius denique excessus AB supra AM, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis est 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium AM $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu AB. Quare sexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ sunt arcu AB, earum sexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor est quam 628362 , major autem quam 628269 ad 200000 . Sive minor quam 314181 , major autem quam 314135 ad 100000 . Unde constat minorem utique esse quam triplam sesquiseptimam, & majorem quam $3\frac{1}{7}\frac{2}{7}$. Quin etiam Longomontani ⁵³⁾ error per hæc refutatur, qui scripsit peripheriam majorem esse partibus 314182 ⁵⁴⁾ qualium rad. 100000 .

Esto nunc arcus AB $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit AM, femissis lateris quadrati circulo inscripti, partium 7071068 , non unâ minus, qualium radius DB 10000000 . AB verò latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad similitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus AB 7847868 . Deinde major terminus 7854066 . Et ex utroque rursus terminus minor accuratior 7853885 . Unde constat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{2}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000 .

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus AB longitudine minus distet quam partibus 85 ; (Est enim arcus AB, per ea quæ supra ostendimus ⁵⁵⁾, major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos scrupulos secundos, hoc est, quam $755\frac{2}{3}\frac{5}{6}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000 : Hinc manifestum est, si trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem istum terminum paulò antè, nunquam duobus

p. 176 du T. I. Déjà en 1612 il publia l'ouvrage qui suit: „Cyclometria ex Lunulis reciproce demonstrata, unde tam Areae, quam Perimetri circuli exacta dimensio, & in numeros diductio sequuta est, hactenus ab omnibus Mathematicis unice desiderata. Ad Christianum Quartum Daniae & Septentrionis Regem. Inventore Christiano S. Longomontano Regio Mathematicum Professore. Hafniae Typis Henrici Waldkirchij. Anno MDLXXII.”

La fausse quadrature qu' il y développe amène à la page 55 la valeur numérique $\pi = 3.14185959069768\dots$; elle est différente de celle de l'ouvrage de 1644, laquelle le conduit à la page 24 au nombre 3, 141859604427...

⁵⁴⁾ Dans l'exemplaire que nous possédons, ce dernier chiffre a été changé à la plume, probablement par Huygens lui-même. On y lit 314185.

⁵⁵⁾ Il s'agit du dernier alinéa du „Problema I. Prop. X”, p. 143 du Tome présent, d'après lequel la circonférence contient plus de 62831852 des parties mentionnées dans le texte; dont le huitième excède 7853981 .

rons de plus de deux secondes; même si les côtés autour de l'angle droit sont égaux entre eux, comme ils l'étaient ici dans le triangle DAM.

Mais si le rapport du côté DM à MA est tel que l'angle ADM ne dépasse pas $\frac{1}{4}$ d'un angle droit, l'erreur ne fera pas même d'une tierce. En effet, posant l'arc AB égal à $\frac{1}{778}$ de la circonférence, AM fera la moitié du côté de l'octogone équilatéral inscrit dans le cercle, et égal à 382683433 parties et pas une de moins; tandis que AB fera le côté du polygone de seize côtés, et contiendra donc 390180644 parties et pas une de plus, le rayon DB contenant 1000000000 de ces parties. On trouve par là une première limite inférieure de la longueur de l'arc AB de 392679714 parties. Et la limite supérieure est 392699148. Et de là de nouveau une limite inférieure 392699010. Or, il résulte de ce que nous avons démontré plus haut ⁵⁶⁾ que l'arc AB, $\frac{1}{778}$ de la circonférence, est plus grand que 392699081 parties, lesquelles la limite supérieure dépasse de 67 parties. Mais celles-ci sont moins qu'une tierce, c'est-à-dire que $\frac{1}{778} \frac{1}{80000}$ de toute la circonférence, puisque celle-ci est plus grande que 6000000000.

Puis, des nouvelles limites que nous venons de trouver le rapport de la circonférence au diamètre sortira plus petit que 3141593 $\frac{1}{5}$, mais plus grand que 3141592 à 1000000.

Et si nous prenons un arc AB égal à $\frac{1}{80}$ de la circonférence, soit à 6 parties dont elle en contient toute entière 360, AM fera la moitié du côté du polygone (inscrit) ⁵⁷⁾ à 30 angles, formé de 10452846326766 parties dont le rayon en a 10000000000000, et pas une de moins. Et AB est le côté du polygone (inscrit) ⁵⁷⁾ de 60 angles, 10467191248588 et pas une de plus. Au moyen de ces données on trouvera l'arc AB d'après la première limite inférieure 10471972889195. D'après la supérieure 10471975512584. Et de là l'autre limite inférieure 10471975511302. D'où il résulte que le rapport de la périphérie au diamètre est moindre que 31415926538, mais plus grand que 31415926533 à 10000000000.

S'il fallait chercher ces limites par l'addition des côtés des polygones inscrits et circonscrits, il faudrait aller presque jusqu'à quatre cent mille côtés ⁵⁸⁾. Car au moyen du polygone à 60 angles inscrit et circonscrit on prouve seulement que le rapport de la périphérie au diamètre est moindre que 3145 à 1000 et plus grand que 3140. Ainsi donc le nombre de chiffres vrais fourni par notre calcul paraît être trois fois plus grand et même plus. Mais si quelqu'un en fait l'expérience, il verra que la même chose arrive toujours avec les polygones suivants: nous n'en ignorons pas la raison, mais elle demanderait une explication trop longue ⁵⁹⁾.

D'ailleurs je crois qu'il est suffisamment clair comment, étant données d'autres inscrites quelconques, on peut trouver par les méthodes exposées la longueur des arcs auxquels elles sont sous-tendues. Car, si elles sont plus grandes que le côté du carré inscrit, on devra chercher la longueur de l'arc restant à la demi-circonférence, dont la corde est alors aussi donnée. Mais on doit aussi savoir trouver les cordes des moitiés des arcs, lorsque la corde de l'arc entier est donnée.

serupulis secundis aberraturos; etiam si æqualia inter se fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo DAM.

Si verò ea sit ratio lateris DM ad MA, ut angulus ADM non excedat $\frac{1}{3}$ recti; non unius tertii serupuli error erit. Posito enim arcu AB $\frac{1}{18}$ circumferentiæ, erit AM femillis lateris octanguli æquilateri circulo inscripti partium 382683433, non unâ minùs. AB verò latus sexdecanguli 390180644 non unâ amplius, qualium radius DB 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus AB invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rursus 392699010. Constat autem ex supra demonstratis⁵⁶⁾ arcum AB $\frac{1}{18}$ peripheriæ, maiorem esse quam 392699081, quas terminus major superat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno serupulo tertio, hoc est, 77780000 totius circumferentiæ, quoniam ea major est utique quam 6000000000.

Porrò ex novissimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam 3141593 $\frac{1}{5}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod si $\frac{1}{86}$ circumferentiæ ponatur arcus AB, seu partium 6 qualium tota 360: Erit AM femillis lateris trigintanguli (inscripti)⁵⁷⁾ partium 10452846326766, non unâ minùs, qualium radius 10000000000000. Et AB latus sexagintanguli (inscripti)⁵⁷⁾ 10467191248588 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus AB secundum primum minorem terminum 10471972889195. Secundum maiorem 10471975512584. Et ex his minor alter terminus 10471975511302. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam 31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos si ex additis inscriptorum & circumscriptorum polygonorum lateribus inquirendum esset serè ad laterum quadringenta millia deveniendum⁵⁸⁾. Nam ex sexagintangulo inscripto circumscriptoque hoc tantum probatur, minorem esse rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, maiorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & amplius verarum notarum numerum nostro ratio-cinio productum appareat. Idem verò in ulterioribus polygonis si quis experiatur semper evenire cernet: non ignota nobis ratione, sed quæ longiori explicatione indigeret⁵⁹⁾.

Porrò autem quomodo, datis quibuscunque aliis inscriptis arcuum quibus subterduntur longitudo per hæc inveniri queat satis puto manifestum. Si enim quadrati inscripti latere majores sunt, longitudo arcus ad femicircumferentiam


⁵⁶⁾ Voir toujours le lieu cité dans la note précédente.

⁵⁷⁾ Les mots entre parenthèses furent ajoutés en marge par Huygens dans l'exemplaire que nous possédons.

⁵⁸⁾ En appliquant les relations approchées de la note 7, p. 94 du Tome présent, on trouve que des polygones de 240000 côtés sufliraient à déduire ces limites à l'aide de la méthode Archimédienne.

⁵⁹⁾ Voir, à ce propos, la note 15, p. 142 du Tome présent.

Et de cette manière, si nous voulons faire usage des bisections, nous pourrons connaître sans difficulté pour toute corde la longueur de son arc, aussi rapprochée que nous voulons. Ceci est utile pour l'examen des tables des sinus. Et de même pour leur composition; car connaissant la corde d'un certain arc, on peut déterminer aussi avec une précision suffisante celle de l'arc qui est un peu plus grand ou un peu plus petit.



reliqui inquirenda est, cujus tum quoque subtensa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum subtensas inveniri cum totius arcus subtensa data est. Atque hac ratione si bisectionibus uti placebit, poterimus ad omnem subtensam, arcus ipsius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoscere. Utile hoc ad sinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognita arcus alicujus subtensa, etiam ejus qui paulò major minorve sit satis accuratè definiti potest.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.
CONSTRUCTIONS DE CERTAINS
PROBLÈMES CÉLÈBRES.

PROBL. I.

Couper une sphère donnée par un plan de manière que les segments soient entre eux dans un rapport donné ¹⁾.

Archimède a résolu ce problème dans le livre 2 de son traité de la Sphère et du Cylindre ²⁾. Mais il semble qu'il n'a pas exposé la construction qu'il avait promise, à moins que ne soit de lui celle qu'Eutocius inféra dans ses Commentaires, l'ayant trouvée dans un livre très vieux ³⁾. Or, elle y est effectuée par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole comme celle dont Dionysidore est l'auteur ⁴⁾, laquelle cependant diffère de la précédente. Outre celles-là Eutocius donne encore une troisième ⁵⁾, tirée du livre de Dioclès sur les Miroirs ardents, laquelle demande le tracé d'une hyperbole et d'une ellipse. Quant à la nôtre, que nous décrirons ici, elle exige la trisection de l'angle; et cette façon de construire paraît pour les problèmes solides en quelque sorte la plus simple, et la plus appropriée à l'usage.

Soit donc donnée une sphère [Fig. 1] dont le centre est M, le diamètre CA. Et soit donné le rapport de la ligne S à T, d'une plus grande à une plus petite. Que l'on se figure la sphère coupée par un plan suivant le diamètre AC et soit CBAD le cercle le plus grand dans cette sphère. Et que l'on prolonge des deux côtés le diamètre CA et que chacun des deux prolongements CH et AE soit égal au demi-diamètre. Et que l'on divise toute la droite HE au point Q, de façon que EQ soit à QH comme S à T. Que l'on place maintenant contre la circonférence la droite

¹⁾ Consultez, sur l'histoire de ce problème, la page 102 de l'„Avertissement”. La solution qui va suivre se retrouve dans une forme modifiée aux p. 16—18 du Tome présent sous la date du 31 janvier 1652.

CHRISTIANI HUGENII C. F.
ILLVSTRIVM QVORVNDAM
PROBLEMATVM CONSTRVCTIONES.

PROBL. I.

Datam sphæram plano secare, ut portiones inter se rationem habeant datam ¹⁾.

Hoc Archimedes problema resolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. ²⁾ Compositionem autem promissam non videtur explicuisse, nisi ipsius est illa quam Eutocius in vetusto quodam libro repertam commentariis suis inferuit ³⁾. Ea verò paraboles & hyperboles interfectione perficitur, uti & illa cuius Dionysidorus autor est ⁴⁾, quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius ⁵⁾ è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipsis descriptionem requirit. Nostra autem quam hic conferibemus anguli trisectionem postulat; Et hæc construendi ratio in solidis problematibus quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maximè accommodata.

Esto igitur data sphæra [Fig. 1] cuius centrum M, diameter CA. Et data sit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur fecari sphæra plano secundum AC diametrum, sitque maximus in ea circulus CBAD. Et producat utrimque diameter CA, & ponatur semidiametro æqualis utraque harum CH, AE. Et dividatur tota HE in Q, ut sit EQ ad QH sicut S ad T. Ipsi autem MQ æqualis

²⁾ Voir la note 3, p. 3 du Tome présent.

³⁾ Consultez les notes 16 et 17, p. 12 du Tome présent.

⁴⁾ Voir p. 37—38 du texte Latin des „Commentarii Eutocii” de l'édition de Bâle, citée note 3, p. 274 du T. XI, (Heiberg, III, p. 181—188).

⁵⁾ Voir p. 38—42 de l'édition de Bâle, (Heiberg, III, p. 189—209).

AR, égale à la droite MQ. Et que l'on prenne MN égale à celle qui sous-tend la troisième partie de l'arc AR. Enfin que par le point N on mène le plan KL qui soit à angles droits sur le diamètre CA. Je dis que ce plan coupe la sphère de telle manière, que le segment dont A est le sommet est à celui dont le sommet est C dans le rapport de S à T⁶⁾.

En effet, coupons la sphère par un plan BD passant par le centre M et parallèle à KL, et joignons KM, ML; et imaginons un cône ayant comme base le cercle formé par la section KL, mais dont le sommet est en M. Comme le carré CM au carré MN, de même soit MN à NO, quant à la longueur. On aura donc, par conversion des rapports, que le carré CM, ou le carré KM, est au carré KN (car le carré KN est l'excès du carré KM sur le carré MN) comme la droite NM est à MO. Or, comme le carré KM, c'est-à-dire le carré BM, au carré KN, ainsi le cercle autour du diamètre BD est à celui décrit autour du diamètre KL. Donc aussi ce cercle là fera à celui-ci comme NM à MO. Et par conséquent le cône KML fera égal à celui dont la base est le cercle autour

^{* 15, 12. *Élém.*⁷⁾} du diamètre BD, mais dont la hauteur est MO *. Mais ce cône est à l'hémisphère BCD, c'est-à-dire au cône qui a comme base le même cercle autour

^{* 32, 1. *Archim. du Sphère et du Cyl.*⁸⁾} du diamètre BD, et comme hauteur MH *, dans le même rapport que MO à MH. Donc aussi le cône KML fera à l'hémisphère BCD comme MO à MH. Et inversement.

Mais ensuite, puisque l'hémisphère BCD est au secteur solide MKCL comme

^{* 42, 1. *Arch. du Sphère et du Cyl.*⁹⁾} à-dire comme MC à CN †, par conversion des rapports, l'hémisphère BCD

^{† 3, 2. *Arch. du Sphère et du Cyl.*¹⁰⁾} fera à la partie qui en reste après enlèvement du secteur MKCL, comme CM à MN: ou bien, après en avoir pris les doubles, comme HM à OQ. Car que OQ est le double de MN, c'est ce que nous montrerons plus tard. Mais on a démontré que l'hémisphère BCD est au cône KML comme HM à MO. Donc déjà l'hémisphère BCD fera à toute la partie comprise entre les plans BD,

^{* 24, 5. *Élém.*¹¹⁾} KL comme HM aux droites QO, OM ensemble *, c'est-à-dire à MQ. C'est pourquoi, par conversion des rapports, l'hémisphère BCD fera au segment KCL, comme MH à HQ. Et si l'on prend les doubles des antécédents, la sphère toute

⁶⁾ La construction exposée est sans doute une modification de celle qui fut communiquée le 9 août 1653 à Kinner à Löwenthorn, laquelle elle-même ne diffère pas essentiellement de celle inventée le 31 janvier 1652 (voir la note 1).

Consultez là-dessus la note 4, p. 16 du Tome présent. Ici encore il est facile de montrer que

la corde, dont l'arc est divisé en trois parties égales, aura la longueur $\frac{S-T}{S+T} \cdot AC$.

⁷⁾ Voir la note 10, p. 11 du Tome présent.

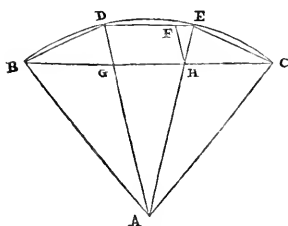
⁸⁾ Voir la note 7, p. 17 du Tome présent.

⁹⁾ Voir la note 11, p. 11 du Tome présent.

entière est au segment KCL comme EH à HQ. Et par partage, le segment KAL est au segment KCL comme EQ à QH, c'est-à-dire comme S à T. Ce qui était à faire. Quant à ce qui a été dit, que OQ est le double de MN, voici comment on le prouve. Puisque comme le carré CM au carré MN ainsi MN est à NO en longueur, et que QM est égal à la corde de l'arc AR dont le tiers est sous-tendu par MN, pour cette raison les deux droites QM et NO ensemble seront égales au triple de MN, ainsi que cela se démontre par le lemme suivant. Et par conséquent la portion commune ON étant enlevée, la droite QM seule sera égale au double de NM avec MO. Mais cette même droite QM est égale aux deux droites QO, OM ensemble, donc il ressort que le double de MN est égal à la droite OQ.

LEMME.

Lorsqu'un arc de circonférence est coupé en trois parties égales, l'ensemble des trois droites qui sont sous-tendues aux parties égales est égal à la sous-tendue de l'arc entier avec une droite qui est à la sous-tendue du tiers comme le carré de celle-ci au carré du demi-diamètre. Supposons que l'arc du secteur ABC soit

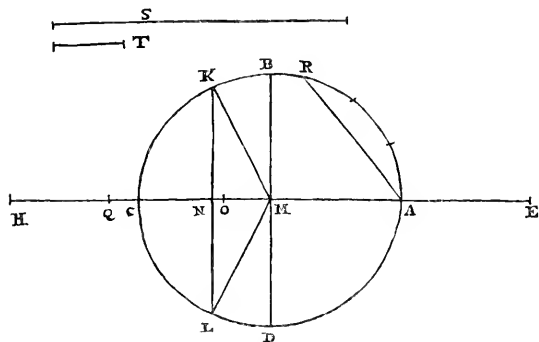


[Fig. 2.]

divisé en trois parties égales par les points D, E; et que les droites BD, DE, EC soient sous-tendues à ces parties et la droite BC à l'arc tout entier. Puis joignons DA, EA et supposons que ces droites coupent la corde BC aux points G et H. Soit enfin HF parallèle à GD.

Ainsi donc la circonférence BDE est double de la circonférence EC, mais l'angle EAC qui repose sur celle-ci est formé au centre, tandis que l'angle BCE reposant sur celle-là est formé sur la circonférence. Pour cette raison l'angle BCE, c'est-à-dire l'angle HCE dans le triangle HCE, est égal à l'angle CAE dans le triangle CAE. Mais l'angle en E est commun à tous deux; donc les dits triangles sont semblables entr'eux; et comme AE à EC ainsi EC fera à EH. Donc le rapport de AE à EH, c'est-à-dire de DE à EF, est la deuxième puissance du rapport de AE à EC, et par conséquent le même que celui du carré AE au carré EC ou ED. Donc, en permutant, FE fera à ED comme le carré ED est au carré EA. A cause de cela il s'agit de démontrer, que les trois droites BD, DE, EC ensemble égalent la corde BC avec ce même EF; ce qui est tout à fait manifeste, car CE est égal à CH, BD égal à BG, et DE à l'ensemble des deux droites GH et FE. Donc la proposition est établie.

antecedentium duplis, sphaera tota ad portionem KCL ut EH ad HQ. Et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut EQ ad QH, hoc est ut S ad T. Quod



[Fig. 1.]

erat faciendum. Quod autem dictum fuit OQ duplam esse ipsius MN, sic fiet manifestum. Quia enim ut quadratum CM ad quadr. MN ita est MN ad NO longitudine: Est autem QM æqualis subtensæ arcus AR cujus trienti subtenditur MN. Erunt propterea duæ simul QM & NO æquales

triplæ MN, uti sequenti lemmate demonstratur. Quamobrem ablata communi ON, erit sola QM æqualis duplæ NM & ipsi MO. Sed eadem QM æqualis est duabus simul his QO, OM, ergo apparet duplam MN æquari ipsi OQ.

LEMMA.

Si Circumferentiæ arcus in tria æqualia fecetur, tres simul rectæ quæ æqualibus partibus subtenduntur, æquantur subtensæ arcus totius & ei quæ ad subtensam trientis sese habeat, sicut hujus quadratum ad quadratum semidiametri. Arcus sectoris ABC [Fig. 2] in tria æqualia divisus sit punctis D, E. Et subtendantur partibus rectæ BD, DE, EC; & toti arcui linea BC. Porro jungantur DA, EA, atque intersecent subtensam BC in punctis G & H. Sitque HGF parallela GD. Quoniam igitur circumferentia BDE dupla est circumferentiæ EC, angulus autem huic insitens EAC ad centrum constitutus, qui verò illi insitit angulus BCE ad circumferentiam. Erit propterea angulus BCE, hoc est, angulus HCE in triangulo HCE æqualis angulo CAE in triangulo CAE. Sed angulus ad E utrique est communis; itaque similes inter se sunt dicti trianguli: Eritque ut AE ad EC ita EC ad EH. Ratio igitur AE ad EH hoc est DE ad EF, duplicata est rationis AE ad EC, ac proinde eadem quæ quadrati AE ad quadr. EC seu quadr. ED. Erit igitur invertendo FE ad ED sicut quadr. ED ad quadr. EA. Quamobrem ostendendum est, tres simul BD, DE, EC æquari subtensæ BC atque ipsi EF. quod fane manifestum est; nam CE est æqualis CH; BD æqualis BG; DE vero utrisque simul GH, & FE. Ergo constat propositum.

Nous avons supposé, il est vrai, que l'arc BC est moindre que la demi-circonférence, parce que dans la construction du problème en question cela est toujours ainsi. Mais le lemme s'applique à des arcs quelconques, et pour des arcs plus grands que la demi-circonférence la démonstration est peu différente.¹²⁾

PROBL. II.

*Trouver un cube double d'un cube donné*¹³⁾.

Pour ce problème nous proposerons d'abord une construction imparfaite, utile pour les constructions mécaniques, puis nous en fournirons une exacte, qui toutefois ne s'effectue qu'en essayant à plusieurs reprises. En effet, les problèmes solides exigent toujours ou ceci ou le tracé de sections coniques.

Soit donc donné un cube dont le côté est AB; il s'agit de trouver le côté d'un cube double.

Décrivons avec le rayon BA un demi-cercle AFC. Supposons que l'arc AF soit le tiers de la demi-circonférence, CD le quart; et menons CF, AD, dont l'intersection est au point E. AE fera le côté du cube cherché; le dépassant toutefois d'une petite quantité, qui est moindre que la $\frac{1}{20000}$ partie, ainsi qu'on peut l'examiner facilement par les nombres. AE est, en effet, la sécante d'un angle de 37 degrés 30 minutes, et est donc plus grande que 12600 parties dont AF ou AB en a 10000. Mais elle est moindre que 12605. Donc, comme le cube sur 12600 est plus grand que le double de celui construit sur AB 10000, le cube sur AE fera plus grand que le double du cube sur AB. D'autre part, puisque AE est plus grand que 12600 parties, $\frac{1}{20000}$ AE fera plus grand que 6 parties. Mais toute la droite AE est plus petite que 12605. Donc, enlevant de AE la deux-millième partie d'elle-même, le reste sera plus petit que 12599 parties; car il en reste autant lorsqu'on déduit 6 de 12605. Or, le cube sur 12599 est plus petit que le double du cube sur 10000. Donc aussi à plus forte raison AE diminuée de la deux-millième partie d'elle-même donne un cube plus petit que celui qui serait le double du cube de côté AB.

Puis, pour la construction exacte, CF doit être tracée comme d'abord; mais AD de telle façon, que la sous-tendue CD soit égale à la partie découpée EF. Et ceci posé, je dis que le cube AE est double de celui formé sur AB.

Prolongeons en effet CA, et soit AG égale à AE. A cause des triangles semblables EC est donc à CD, c'est-à-dire EF, comme EA à AF, c'est-à-dire comme

¹²⁾ Cette remarque manque dans la rédaction du 31 janvier 1652 (p. 16—18 du Tome présent), où le lemme et sa démonstration se retrouvent.

¹³⁾ Comparez, pour ce problème, les pages 45—48 du Tome présent où on retrouvera, sous les dates du 1^{er} et du 2 mars 1652, d'abord la solution exacte dans une rédaction peu différente, puis la construction approximative avec une démonstration bien plus proluxe.

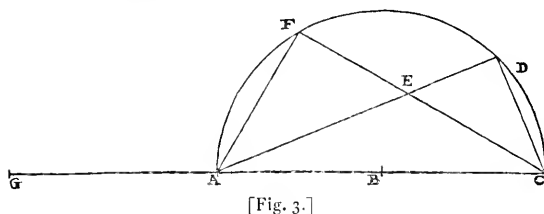
Sumpſimus autem arcum BC femicircumferentiâ minorem quoniam in conſtructione problematis ejusmodi ſemper invenitur. Nam lemma ad quovis arcus pertinet, eſtque in femicircumferentiâ majoribus demonſtratio parum diverſa ¹²⁾.

PROBL. II.

Cubum invenire dati cubi duplum ¹³⁾.

Ad hoc imperfectam primò conſtructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam ſubjiciemus, quæ tamen non niſi ſæpius tentando perficiatur. Etenim ſolida problemata omnia vel iſthic ¹⁴⁾ exigunt vel ſectionum conicarum deſcriptionem.

Sit itaque datus cubus latus AB, oporteatque invenire latus cubi dupli.



Radio BA femicirculus deſcribatur AFC. Sitque arcus AF femicircumferentiæ triens, CD vero quadrans; & ducantur CF, AD, quarum interſectio ad E punctum. Erit AE latus cubi quæ-

ſiti; exiguo tamen excedens, quodque minus ſit $\frac{1}{20000}$ ſui parte, ut facile numeris explorari poteſt. Fit enim AE ſecans anguli p. 37. ſcr. 30. quæ proinde major eſt partibus 12600 qualium AF vel AB 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 ſit major quam duplus ejus qui ex AB 10000, erit & cubus AE major duplo cubo ex AB. Rurſus quia AE major eſt partibus 12600 erit $\frac{1}{20000}$ AE major part. 6. Tota verò AE minor eſt quam 12605. Ergo auferendo ab AE partem biſmilieſimam ſui iplius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim ſuperſunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor eſt duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque AE diminuta parte ſui biſmilieſima cubum minorem producet quam ſit duplus cubus à latere AB.

Porrò ad perfectam conſtructionem, CF quidem uti priùs ducenda eſt; AD verò ſic, ut ſubtenſa CD æqualis ſit abſciſſæ EF. Etenim his poſitis dico cubum AE ejus qui ex AB duplum exiſtere.

Producatur enim CA, & ſit ipſi AE æqualis AG. Propter triangulos ſimiles igitur eſt EC ad CD, hoc eſt, EF ut EA ad AF, hoc eſt, ut GA ad AB. Et

¹⁴⁾ Dans l'exemplaire que nous poſſédons le mot „iſthic” a été changé à la plume par Huygens en „hoc”.

GA à AB. Et par composition, CF est à FE comme GB à BA ou AF. Puis, permutant, CF est à GB comme EF à FA. Par conséquent, comme le carré CF est au carré GB, ainsi le carré EF au carré FA. Et par composition, comme les carrés CF et GB ensemble sont au carré GB, ainsi l'ensemble des carrés EF et FA, c'est-à-dire le carré EA au carré AF. Mais les carrés CF et GB valent ensemble le rectangle GCA avec le carré AG, ce qui se démontre ainsi. Le carré GB est égal au rectangle CGA augmenté du carré AB ou AF*. Donc, ajoutant de part et d'autre le carré FC, les carrés GB et FC pris ensemble seront égaux au rectangle CGA plus le carré AC. Or, le rectangle CGA avec le carré AC équivaut au rectangle GCA avec le carré GA. Donc aussi les carrés CF et GB équivaudront ensemble au rectangle GCA avec le carré AG, comme nous l'avons dit. Donc, comme le rectangle GCA avec le carré AG au carré GB, ainsi le carré EA est au carré AF, c'est-à-dire ainsi le carré GA au carré AB. Et permutant, comme le rectangle GCA avec le carré GA au carré GA, ainsi le carré GB est au carré AB. Donc, par partage, comme le rectangle GCA est au carré GA, ainsi le carré GB diminué du carré AB, c'est-à-dire le rectangle CGA, sera au carré AB. Et permutant de nouveau, comme le rectangle GCA est au rectangle CGA, c'est-à-dire comme CA à AG, ainsi le carré GA est au carré AB. Pour cette raison, ce qu'on obtient du carré GA avec la même droite GA, c'est-à-dire le cube GA, sera égal à ce qu'on obtient du carré AB avec AC; c'est-à-dire au double du cube de AB. Ce qu'il fallait démontrer¹⁵⁾.

PROBL. III.

*Trouver deux moyennes proportionnelles à deux droites données*¹⁷⁾.

Pour ce problème Eutocius a noté plusieurs constructions des vieux géomètres dans ses commentaires sur le livre 2 d'Archimède sur la Sphère et le Cylindre¹⁸⁾; mais elles ne sont pas toutes d'invention différente, ainsi qu'il l'a lui-même justement remarqué. Car Apollonius et Philon le Byzantin¹⁹⁾ paraissent avoir suivi l'invention d'Héron²⁰⁾, bien que quelques-uns jugent que Héron est postérieur à Apollonius²¹⁾. Pappus et Sporus ont suivi la méthode de Dioclès²²⁾. On trouve au

¹⁵⁾ Voir, sur cette proposition, la note 2, p. 46 du Tome présent.

¹⁶⁾ On peut consulter encore sur cette démonstration la note 3, p. 46 du Tome présent.

¹⁷⁾ Voir, sur l'historique de ce problème, les p. 103—106 de l'«Avertissement».

¹⁸⁾ Voir les Commentaires d'Eutocius, aux p. 14—27 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 66—127).

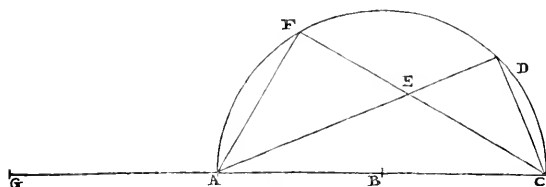
¹⁹⁾ Voir, sur la construction de Héron, les p. 15—16 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 70—73) et consulter encore la note 10, p. 40 du Tome présent.

²⁰⁾ Voir, sur ces constructions, les p. 16—17 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 72—79). L'identité essentielle des trois constructions fut déjà constatée par Eutocius.

²¹⁾ La question de déterminer l'époque où vivait Héron a beaucoup occupé les savants jusque dans notre temps. On peut consulter à ce propos le Chap. XVIII du T. I de l'ouvrage bien-

componendo CF ad FE ut GB ad BA five AF. Et permutando CF ad GB ut EF ad FA. Quare ut CF quadratum ad quadr. GB, ita quadr. EF ad quadr. FA. Et componendo ut quadr. CF & GB ad quadr. GB, ita quadr. EF & FA simul, hoc est, quadr. EA ad quadr. AF. Quadr. autem CF & GB simul æquantur rectangulo GCA cum quadr. AG, quod sic ostenditur. Quadratum enim GB æquale

est rectangulo CGA & quadrato AB seu AF*. Quare addito * 6. 2. Elem.¹⁵⁾ utrimque quadrato FC, erunt quadrata GB, FC simul æqualia rectangulo CGA & quadrato AC. Rectangulum autem CGA cum



[Fig. 3.]

quadrato AC æquatur rectangulo GCA cum quadrato GA. Itaque & quadrata CF, GB simul æqualia sunt rectangulo GCA cum quadrato AG, sicut diximus. Sicut igitur rectangulum GCA cum quadrato AG ad quadr. GB, ita est quadr. EA ad quadr. AF, hoc est, ita quadratum GA ad quadr. AB. Et permutando, ut rectangulum GCA cum quadrato GA ad quadratum GA ita quadr. GB ad quadr. AB. Dividendo igitur, erit ut rectang. GCA ad quadr. GA, ita quadr. GB dempto quadrato AB, hoc est, rectangulum CGA ad quadr. AB. Et permutando rursus, ut rectang. GCA ad rectang. CGA, hoc est, ut CA ad AG ita quadratum GA ad quadr. AB. Quamobrem quod fit ex quadrato GA in ipsam GA, hoc est, cubus GA æquabitur ei quod fit ex quadrato AB in AC, hoc est, duplo cubo ex AB. Quod erat demonstrandum ¹⁶⁾.

PROBL. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire ¹⁷⁾.

Veterum Geometrarum ad hoc Problema constructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro ¹⁸⁾, at non omnes inventionem diversas, uti rectè quoque ipse animadvertit. Heronis enim inventionem ¹⁹⁾ secuti videntur Apollonius & Philo Byzantius ²⁰⁾: quanquam Heronem Apollonio ætate posteriorem nonnulli existimant ²¹⁾. Dioclis modum Pappus & Sporus ²²⁾. Nico-

connu de Cantor „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ qui place Héron dans le premier siècle avant J. C., c'est-à-dire après Philon de Byzance et plus d'un siècle entier après Apollonius.

²²⁾ Voir, sur ces constructions, les p. 17—20 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 78—93). Dioclès fait emploi de sa cissoïde; les autres constructions se réduisent aisément à celle de Dioclès, comme Eutocius l'a déjà remarqué.

même lieu²⁴⁾ la construction, plus subtile que les autres, de Nicomède²⁵⁾, que Fr. Viète a inférée, arrangée un peu autrement, dans son Supplément à la Géométrie²⁶⁾. La méthode de R. Descartes par l'interfection d'une parabole et d'une circonférence²⁶⁾, dont on trouve la démonstration dans les livres de Harmoniques de M. Merfenne²⁷⁾, est excellente et nouvelle. Viennent maintenant les nôtres.

Soit de deux lignes données AC la plus grande²⁸⁾, qui est divisée en deux parties égales au point E. Et soit AB la plus petite, que nous supposons placée de telle façon, que le triangle EAB ait les côtés AE, EB égaux. Achéons le parallélogramme CABD, et prolongeons AC, AB. Puis appliquons une règle au point D et mouvons-la jusqu'à ce qu'elle ait la position GF, où elle découpe justement une portion EF égale à la droite EG; (ce que nous obtiendrons en essayant souvent, ou par le tracé d'une hyperbole, ainsi que nous le montrerons plus loin). Je dis que l'on a trouvé alors les deux moyennes BG, CF entre AC et AB.

Soit en effet EK à angles droits sur AB. Puis donc que BE est égal à EA, la droite AB sera divisée en deux parties égales en K; mais la droite BG est adjacente. Donc le rectangle AGB avec le carré sur KB fera égal au carré KG. Et ajoutant de part et d'autre le carré KE, le rectangle AGB avec les carrés BK et KE, c'est-à-dire avec le carré BE, fera égal au carré EG. De même, puisque AC est partagé en deux parties égales en E, et que la ligne CF est adjacente, le rectangle AFC avec le carré EC fera égal au carré EF. Mais le carré EF est égal au carré EG. Donc le rectangle AFC avec le carré CE fera égal au rectangle AGB avec le carré BE. Or, le carré CE ou EA est égal au carré EB. Donc aussi le rectangle restant AFC est égal au rectangle AGB. Pour cette raison, comme FA à AG ainsi BG est à CF. Mais comme FA à AG ainsi DB est à BG et ainsi aussi FC à CD.

²³⁾ Consultez, sur cette construction, la note 2, p. 13 et la p. 15 du Tome présent. Nous avons exposé ailleurs, aux p. 4—6 du Tome présent, comment l'étude de la construction de Nicomède a été pour Huygens le point de départ d'autres recherches sur les problèmes solides et surtout de ses solutions nouvelles, qui vont suivre, du problème des deux moyennes proportionnelles.

²⁴⁾ Voir les p. 26—27 de l'édition du Bâle (Heiberg, III, p. 122—127).

²⁵⁾ Voir la Prop. V, p. 242—243 de l'ouvrage cité dans la note 31, p. 10 du T. I. Pour comparer la construction de Viète avec celle de Nicomède on doit identifier respectivement les points A, B, C, D, G et H de la figure de Viète avec les points B, A, L, C, D et E de la figure de la page 15 du Tome présent. Alors on s'aperçoit que Viète commence sa construction par décrire un cercle dont le centre deviendra le point B de cette dernière figure et dont le diamètre est égal au plus grand des deux segments donnés. Dans ce cercle il inscrit une corde LA égale au plus petit segment et il prend CL = LA. Ensuite il tire la droite AD parallèle à CB et la droite BE de manière qu'on a DE = AB. Alors, d'après lui, AE est la première des deux moyennes et la seconde est la distance du point E au point d'intersection du cercle avec BE, mais puisqu'on a DE = BA on voit aisément que cette distance est égale à BD.

Ainsi la comparaison de la solution de Viète avec celle de Nicomède, qui donne AE et GK pour les deux moyennes, fait connaître une nouvelle propriété de la figure mentionnée, c'est-à-dire l'égalité de BD avec GK. On a, en effet, BD : DE = CA : AE, donc BD : 2DE = 1/2 CA :

Donc comme DB, c'est-à-dire AC, à BG, ainsi BG est à FC, et FC à CD, c'est-à-dire AB. Ce qu'il fallait démontrer. Quant à ce que nous avons dit, que l'on peut également trouver par la description d'une hyperbole comment la droite FDG doit être tracée, cela sera évident par ceci: supposons que l'on ait fait en sorte que EF, EG soient égales, et que l'on prenne GN égale à DF. Le point N est ainsi sur l'hyperbole que l'on tracera par le point D avec les droites FA, AG comme asymptotes*. Mais le même point N est aussi sur la circonférence de cercle, dont le centre est E et le rayon ED; (car ceci se comprend facilement, puisque le triangle FEG est isocèle et que NG est égal à DF). Par conséquent le point N est donné par l'intersection de l'hyperbole et de la dite circonférence. Mais D aussi est donné, La ligne FG est donc donnée en position en la menant par les points N et D. Et la construction est évidente.

* B. 2. *Coni-*
ques 30).

AUTREMENT 30).

Autour du diamètre AC égal à la plus grande des lignes données on décrit un cercle; on y place AB égale à la plus petite des droites données et on achève le parallélogramme AD; puis, AB étant prolongée, on mène du centre E une droite EHIG, de telle manière que HD, HG soient égales entr'elles. Supposons qu'elle coupe la circonférence en L. Je dis qu'on a trouvé les deux moyennes BG et GL aux deux droites AC, AB.

Prolongeons 31), en effet, GE jusqu'à la circonférence en K, joignons AK et menons BO qui lui soit parallèle. Alors les triangles AEK, BHO sont semblables; et comme AE est égale à EK, BH et HO seront aussi égales entr'elles. Mais encore HG, HD sont égales entr'elles. Donc toute la droite OG est égale à BD, c'est-à-dire au diamètre AC ou LK; et après avoir enlevé la partie commune LO, il reste des lignes égales LG, OK. Mais le rectangle KGL est égal au rectangle AGB. Donc comme KG est à GA ainsi BG à GL. Mais comme KG à GA ainsi OG est à GB et ainsi aussi le reste OK, c'est-à-dire LG, à BA. Donc comme OG, c'est-à-dire AC, à GB ainsi BG est à GL et GL à AB. Ce qu'il fallait démontrer. Or, l'invention de cette construction a la même origine que la précédente 32).

29) Voir, à la p. 46 recto de l'édition de Commandin, citée dans la note 4, p. 6 du T. I, la proposition suivante: „Si hyperbolae recta linea occurrat in duobus punctis, producta ex utraque parte cum asymptotis conveniet: & lineae, quae ex ipsa abscissae intersectionem, & asymptotos intericiuntur, aequales erunt.”

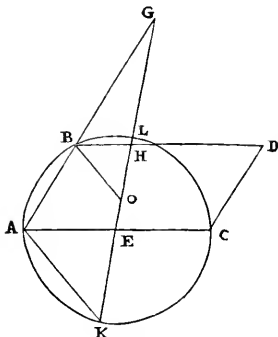
30) On retrouve la construction qui suit à la p. 52 du Tome présent.

31) La démonstration qui va suivre ne diffère pas sensiblement de celle qu'on trouve, sous la date du 5 juin 1652, dans le dernier alinéa de la pièce XI, p. 49—53 du Tome présent. L'avant-

AC ad BG ita BG ad FC, & FC ad CD, hoc est, AB. Quod erat dem. Quod autem dictum est, etiam descriptâ hyperbole inveniri quomodo linea FDG ducenda sit, hinc constabit: Factum enim sit, ut EF, EG sint æquales, & sumatur GN æqualis DF. Itaque punctum N est ad hyperbolem quæ describitur per D punctum circa asymptotos FA, AG*. Sed idem punctum N est quoque ad ^{4. 2. 2. *Conic.*²⁹⁾} circuli circumferentiam cujus centrum E radius ED: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus FEG est æquicursus, & NG æqualis DF) Itaque datum est punctum N ad intersectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum est. Datur igitur positione linea FG ducenda per puncta N, D. Et compositio manifesta est.

ALITER 3°).

Circa diametrum AC majori datarum linearum æqualem circulus deferibatur & ponatur AB minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum AD: productâque AB, ducatur ex centro E recta EHG eâ ratione ut HD, HG sint inter se æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus AC, AB duas medias inventas esse BG, GL.



[Fig. 5.]

Produceatur ³¹⁾ enim GE usque ad circumferentiam in K, & jungatur AK, eique parallela ducatur BO. Similes itaque sunt trianguli AEK, BIO; & quia AE aequalis EK, etiam BH, IO aequales erunt. Sed & HG, HD inter se aequales sunt. Igitur tota OG aequalis BD, hoc est, diametro AC vel LK; & ablata communi LO, relinquentur aequales LG, OK. Est autem rectangulum KGL aequale rectangulo AGB. Ergo ut KG ad GA ita BG ad GL. Sed ut KG ad GA ita est OG ad GB & ita reliqua OK, hoc est, LG ad BA. Ergo ut OG, hoc est, AC ad GB ita

BG ad GL & GL ad AB. Quod erat demonſtr. Hujus autem conſtructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet ³²).

dernier alinéa de cette même pièce contient une autre démonstration et fait connaître l'origine de la construction.

³²⁾ Voir la note 9, p. 52 du Tome présent.

AUTREMENT ³⁵⁾.

Soient données AB et Q auxquelles il s'agit de trouver deux moyennes proportionnelles, AB étant d'ailleurs plus grande que Q.

Prenons AF égale à la moitié de Q et, ayant prolongé AB des deux côtés, soit BR égale à cette droite même. Elevons à AB la perpendiculaire FC, et portons RC égale à RA; puis joignons BC et menons AE parallèle à cette droite. Enfin, ayant appliqué une règle au point C, mouvons la jusqu'à ce qu'elle ait la position CD, où elle fait CE égale à AD. Je dis qu'entre AB et Q les deux moyennes proportionnelles sont CE et ED.

Joignons en effet CA. Alors, comme RA et RC sont égales et que l'angle CFA est droit, RA sera à AC comme AC au double de AF, c'est-à-dire à Q, et par conséquent le carré AC sera égal au rectangle sur RA et Q. Mais le carré AC avec le carré AD et le double du rectangle DAF, c'est-à-dire le rectangle formé par DA et Q, égale le carré DC*. Donc le carré DC équivaudra au carré DA augmenté des rectangles construits avec DA et Q et avec RA et Q, c'est-à-dire augmenté avec le rectangle sur DR et Q. Mais le carré DB est égal au rectangle RDA avec le carré AB*. Donc, comme le carré DB au carré DC, c'est-à-dire comme le carré AB au carré AD, (car, comme DB à DC tel est AB à EC ou AD) ainsi le rectangle RDA avec le carré AB fera au rectangle sur RD, Q avec le carré AD. Et pour cette raison le rectangle RDA fera aussi au rectangle sur RD, Q comme le carré AB au carré AD*. Mais, comme le carré AB au carré AD, ainsi AB est à ED en longueur: car, comme BA à AD, ainsi CE, c'est-à-dire la même AD, à ED. Donc le rectangle RDA est au rectangle sur RD, Q, c'est-à-dire AD est à Q, comme AB à ED. Permutant donc et invertissant, BA est à AD comme ED à Q. Mais aussi, comme BA à AD, ou CE, ainsi CE à ED. Donc, comme AB à CE ainsi CE à ED et ED à Q. Ainsi donc entre AB et Q les moyennes proportionnelles sont CE, ED. Ce qu'il fallait démontrer.

³³⁾ Comparez, aux pages 54—56 du Tome présent, la pièce N° XII, datée du 16 et du 19 mars 1652. Elle contient dans une autre rédaction la construction et la démonstration qui vont suivre, et elle nous fait connaître l'analyse qui les a amenées.

³⁴⁾ Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

³⁵⁾ Voir la note 2, p. 46 du Tome présent.

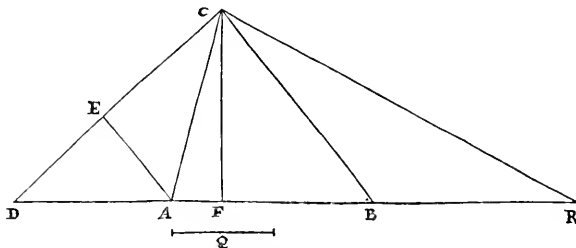
³⁶⁾ Voir la note 26, p. 311 du Tome XI.

ALITER ³³⁾.

Sint datæ AB & Q quibus duas medias proportionales invenire opus sit; AB autem quam Q major.

Dimidiæ Q fumatur æqualis AF, & productâ AB utrimque, fit ipfi æqualis BR. Erigatur autem ad AB perpendicularis FC, & ipfi RA æqualis ponatur RC: & jungatur BC, & huic parallela ducatur AE. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quousque positionem habeat CD, faciens CE æqualem AD. Dico inter AB & Q duas medias esse CE, ED.

Jungatur enim CA. Igitur quia æquales sunt RA, RC & angulus CFA rectus,



[Fig. 6.]

erit RA ad AC ut AC ad duplam AF, hoc est, Q: ac proinde quadratum AC æquale rectangulo sub RA & Q. Quadratum autem AC cum quadrato AD & duplo rectangulo DAF, hoc est, sub DA & Q contento, æquatur quadrato DC *. ^{* 12.2. Elem.³⁴⁾} Igitur quadratum DC æquabitur quadrato DA unâ cum rectangulis sub DA, Q, & sub RA, Q, hoc est, unâ cum rectangulo sub DR & Q. Quadratum autem DB æquale rectangulo RDA & quadrato AB *. Igitur ut quadratum DB ad quadratum DC, hoc est, ut quadr. AB ad quadr. AD, (est enim ut DB ad DC sic AB ad EC five AD) ita erit rectangulum RDA cum quadrato AB ad rectangulum sub RD, Q, cum quadrato AD. Quamobrem & rectangulum RDA ad rectangulum sub RD, Q, sicut quadr. AB ad quadr. AD *. Est autem ut quadratum AB ad quadr. ^{* 19.5. Elem.³⁵⁾} AD, ita AB ad ED longitudine: nam ut BA ad AD sic CE, hoc est, ipsa AD ad ED. Ergo rectangulum RDA ad rectangulum sub RD, Q, hoc est, AD ad Q sicut AB ad ED. Et permutando & invertendo, BA ad AD ut ED ad Q. Atqui ut BA ad AD, hoc est, CE ita CE ad ED. Ergo ut AB ad CE ita CE ad ED, & ED ad Q. Itaque inter AB & Q mediæ proportionales sunt CE, ED. Quod erat ostendendum.

PROBL. IV.

Étant donné un carré dont l'un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé³⁷⁾.

Soit BA un carré dont le côté FA est prolongé. Soit donné aussi la ligne K. Et qu'il s'agisse de mener la droite BDC de telle façon, que la partie interceptée DC soit égale à la droite donnée K.

Supposons qu'aux carrés sur K et EB soit égal le carré EG; sur BG comme diamètre décrivons le demi-cercle BCG, coupant la droite FA prolongée en C, et menons BDC. Je dis que DC est égale à cette droite K. Joignons en effet CG, GD; et soit CH à angles droits sur BG.

Puisqu' alors les triangles BED, CHG sont semblables et que les côtés BE, CH autour des angles droits sont égaux entr'eux, le côté DB fera aussi égal au côté GC, et DE à GH. Mais les carrés CD, CG, c'est-à-dire les carrés DC, CH^{* 47.1. Élém.³⁸⁾} et HG, sont égaux au carré DG*, c'est-à-dire aux carrés GE, ED. Donc, retranchant d'ici le carré ED et de là le carré HG, les deux carrés DC et CH seront égaux au carré EG, c'est-à-dire aux carrés de K et EB*. Mais le carré EB est égal au carré CH. Donc aussi le carré restant DC sera égal au carré K, et la droite DC à K même. Ce qu'il fallait démontrer.

Cette démonstration est différente de celle que l'on trouve chez Pappus Alex. livre 7. prop. 72³⁹⁾. Mais la construction ne diffère pas. Du reste nous avons trouvé qu'elle s'applique aussi au cas suivant.

PROBL. V.

Soit donné un carré dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale du carré⁴⁰⁾.

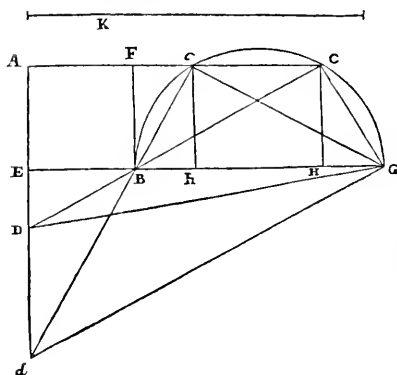
Soit donné le carré AB [Fig. 8], et soient prolongés les côtés AF, AE. Et soit donnée la droite K, pas moindre que le double de la diagonale AB. Et qu'il faille faire passer par le sommet B une droite DC égale à K.

³⁷⁾ Consultez, sur l'historique du problème, la p. 106 du Tome présent.

³⁸⁾ „In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis, quae à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.” (Clavius, p. 147).

³⁹⁾ Voir la page 206 verso de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 du T. II.

Si K était égal au double de AB, la construction ferait évidente; alors, en effet,



[Fig. 8.]

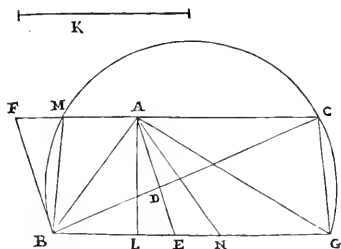
Donc la moitié de BG, c'est-à-dire le rayon du demi-cercle décrit, est plus grand que EB ou BF; il est donc nécessaire que la droite AC soit coupée par la circonférence BCG.

il faut mener par B la droite qui est à angles droits sur AB, et celle là résoudra le problème. Mais alors que K est plus grand que le double de AB, la construction s'exprime par les mêmes mots que dans le problème précédent; et la démonstration aussi est la même.

Or, que la circonférence BCG coupe la droite AF prolongée, cela est manifeste par ceci. Puisque K est plus grande que le double de la diagonale AB, le carré sur K fera plus grand que huit carrés EB. Donc le carré EG fera plus grand que neuf carrés sur EB; et par conséquent EG est plus grand que trois fois EB.

PROBL. VI.

Soit donné un losange dont l'un des côtés soit prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé^().*

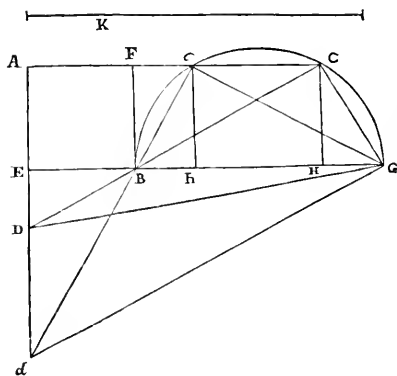


[Fig. 9.]

Soit donné le losange AB, dont le côté FA est prolongé. Soit donnée aussi la ligne K. Et qu'il s'agisse de mener la droite BDC, de telle façon que la partie interceptée DC soit égale à cette ligne K.

Menons la diagonale AB et prolongeons le côté BE; et soit le carré AG égal aux carrés de K et AB. Sur BG décrivons un arc de circonférence qui soit capable d'un angle égal à BFA. Elle coupera le côté FA prolongé, ainsi qu'il sera prouvé. Puis, vers le point d'intersection C menons BC. Je dis que la partie DC interceptée de cette ligne est égale à la droite donnée K. Mais d'abord voici comment on démontre que la circonférence décrite coupe le côté FA prolongé. Menons AN de telle façon que l'angle BAN soit égal à l'angle BFA ou BEA. Alors le triangle

Si K æqualis fuerit duplæ AB , constructio manifesta est; tunc enim per B



[Fig. 8.]

unde necesse est rectam AC secari à circumferentia BCG .

PROBL. VI.

Rhombus dato, & uno latere productio, aptare sub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppositum angulum pertineat ⁴¹⁾.

Sit datus rhombus AB [Fig. 9], cujus productum latus FA . Data autem linea K . Et oporteat ducere rectam BDC , ita ut pars intercepta DC sit ipsi K æqualis.

Ducatur diameter AB , & latus BE producat; & quadratis ex K & AB sit æquale quadratum AG . Et super BG circumferentia portio describatur quæ capiat angulum ipsi BFA æqualem. Secabit ea productum latus FA , ut modo ostendetur. Itaque ad intersectionis punctum C ducatur BC . Dico hujus partem interceptam DC lineæ datæ K æqualem esse. Quod autem circumferentia descripta latus FA productum secabit, sic primùm ostenditur. Ducatur AN ita ut sit angulus BAN angulo BFA vel BEA æqualis. Itaque triangulus BAN triangulo BEA similis est, ac proinde isosceles quoque. Quare si super BN circumferentia describatur quæ capiat angulum BFA , ea contingeret latus FA in A puncto. Sed

⁴¹⁾ Voir, pour l'histoire du problème, les p. 107—108 du Tome présent. La rédaction du texte, qui va suivre, ne diffère que légèrement de celle de la pièce du 23 octobre 1653 (p. 247—248 du T. 1), envoyée à van Schooten. Et cette dernière pièce est le résultat d'un remaniement de celle du 9 février 1652, que l'on trouve aux p. 26—31 du Tome présent et qui contient l'analyse, qui a amené la construction, dans sa forme primitive un peu différente de celle du texte. Voir, sur cette modification, la note 8, p. 28 du Tome présent.

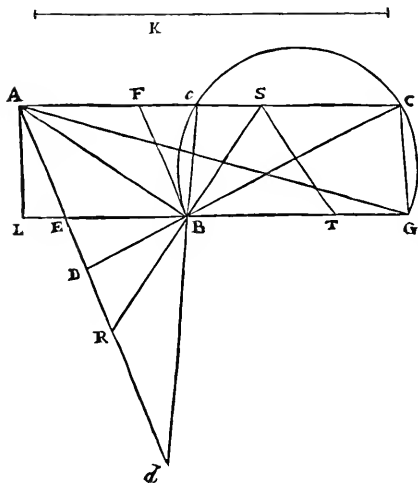
BAN est semblable au triangle BEA, et par conséquent ifocèle comme celui-ci. Pour cette raison, si sur BN on décrit une circonférence capable de l'angle BFA, elle touchera le côté FA en A. Mais BG est plus grand que BN: car le carré AG est plus grand que le carré AN ou AB, puisqu'il est égal aux carrés de K et AB. Donc AG tombera en dehors du triangle ifocèle BAN. Et ainsi il est établi que la circonférence décrite sur BG et capable d'un angle égal à BFA ou BAN coupe la ligne FAC. Soit M l'autre point d'intersection, joignons BM, GC, et soit AL la perpendiculaire abaissée de A sur BE.

Puis donc que le carré AG est égal aux carrés sur K et AB, et que le même carré AG est égal aux carrés AB et BG diminué du double du rectangle GBL, c'est-à-dire moins le rectangle GBN; le carré K fera égal au carré BG moins le rectangle GBN, c'est-à-dire au rectangle BGN. Mais, comme le rectangle BGN au rectangle BE, GN, ainsi BG est à BE. Donc, comme BG à BE ainsi aussi le carré K au rectangle GN, BE, c'est-à-dire au rectangle GBE moins le rectangle NBE. Mais le rectangle CBD est égal au rectangle GBE, parce que GB est à BC comme DB à BE à cause des triangles semblables GBC, DBE; ils ont en effet l'angle en B commun, et l'angle BCG est égal à l'angle BED. De même le carré AB est égal au rectangle NBE, puisque, à cause des triangles semblables, NB est à BA comme AB à BE. Donc GB fera à BE comme le carré K au rectangle CBD moins le carré AB. Mais au rectangle CBD moins le carré AB équivaut le rectangle DA, AC; ce qui se prouve ainsi. En effet, puisque le quadrilatère CGBM est dans un cercle, les angles CGB et BMC ensemble sont égaux à deux angles droits. Mais de même les angles EDB, ADB. De ceux-ci EDB est égal à l'angle CGB en vertu de la similitude des triangles GBC, DBE. Donc aussi l'angle BMC fera égal à l'angle ADB. Les triangles ABM, ADB ont donc les angles M et D égaux entr'eux. Mais aussi les angles en A et le côté AB commun. Et ainsi les dits triangles sont semblables et égaux. Par conséquent AM égale AD et MB égale BD, et l'angle MBA égale ABD. Donc dans le triangle MBC l'angle B est divisé en deux parties égales par la droite BA, et par conséquent le rectangle MBC moins le carré BA est égal au rectangle MAC. Mais le rectangle CBD est égal au rectangle CBM; et le rectangle DAC égal au rectangle MAC. Donc le rectangle CBD moins le carré BA est égal au rectangle CAD, ainsi qu'il a été dit. Ainsi GB est à BE comme le carré K au rectangle DAC. Mais, comme GB à BE ainsi le rectangle GBE, c'est-à-dire le rectangle CBD, est au carré BE. Donc, comme le carré K au rectangle DAC ainsi le rectangle CBD au carré BE. Or, le rapport du rectangle CBD au carré BE est composé du rapport DB à BE, c'est-à-dire DC à CA, et du rapport CB à BE ou BF, c'est-à-dire CD à DA. Donc aussi le carré K est au rectangle DAC dans le rapport composé du rapport DC à CA et DC à DA, c'est-à-dire dans le même rapport que celui du carré DC au rectangle DAC. Pour cette raison le carré K est égal au carré DC; et DC à K en longueur. Ce qu'il fallait démontrer.

PROBL. VII.

Soit donné un losange dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale qui joint les deux autres sommets du losange⁴²).

Soit donné le losange AB dont on prolonge les côtés AF, AE; soit donnée aussi la droite K égale à laquelle il faut placer une droite CD, passant par le sommet



[Fig. 10.]

B. Menons la diagonale AB et à angles droits sur elle la ligne SBR, qui sera évidemment égale au double de la diagonale FE. Donc K ne doit pas être plus petite que SR. Si elle est égale, on a fait ce qui était proposé. Mais supposons que la droite donnée K soit plus grande que SR. Déjà dans la figure présente la construction sera telle qu'il fut proposé; la même que dans le Problème précédent. Mais la démonstration est un peu différente. Car d'abord on démontre autrement, que la circonférence décrite sur BG coupe AF prolongée. Soit AL perpendiculaire à EB et menons ST de façon que l'angle BST soit égal à l'angle EAF ou BFS. Alors le triangle BST est semblable au tri-

angle BFS; (car ils ont aussi les angles en B égaux;) et par conséquent le triangle BST est de même isocèle. On voit donc que la ligne AS est égale à LB avec la moitié de BT. Pour cette raison le double de AS sera égal au double de LB avec BT toute entière. Mais le double de AS est le quadruple de AF ou EB. Donc le quadruple de EB est égal au double de LB et BT. Et si l'on prend une hauteur commune BT, le rectangle formé par le quadruple de EB et BT sera égal au double du rectangle LBT plus le carré BT. Et ajoutant de part et d'autre le carré BL, quatre fois le rectangle EBT avec le carré LB vaudra deux fois le rectangle LBT avec les carrés BT, BL, c'est-à-dire avec le carré LT. Mais puisque en vertu des triangles semblables TB est à BS comme BS à BF ou BE, le rectangle EBT sera égal au carré BS; et pris quatre fois au carré RS. Et ainsi le

PROBL. VII.

Rhombō dato & duobus contiguīs lateribus produclis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit ⁴²⁾.

Sit datus rhombus AB [Fig. 10] ejus producantur latera AF, AE; data autem sit recta K cui æqualem ponere oporteat CD, per angulum B transeuntem. Ducatur diameter AB, eique ad angulos rectos linea SBR, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro FE. Igitur K non minor debet esse quam SR. Si vero æqualis, factum est quod proponebatur. Sed ponatur K major data esse quam SR. Erit jam in schemate hoc prout propositum est constructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonstratio autem nonnihil diversa. Etenim hoc primò aliter ostenditur quod circumferentia super BG descripta fecit productam AF. Sit AL ad EB perpendicularis & ducatur ST ut sit angulus BST æqualis angulo EAF vel BFS. Est itaque triangulus BST triangulo BFS similis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus BST. Apparet igitur lineam AS æquari ipsi LB cum dimidia BT. Quare dupla AS æquabitur duplæ LB & toti BT. Sed dupla AS est quadrupla AF vel EB. Ergo quadrupla EB æqualis duplæ LB & BT. Sumptæque communi altitudine BT, erit rectangulum sub quadrupla EB & BT contentum, æquale duplo rectangulo LBT & quadrato BT. Et addito utrimque quadrato BL, erit rectangulum EBT quater cum quadrato LB æquale rectangulo LBT bis cum quadratis BT, BL, hoc est quadrato LT. Quia verò propter triangulos similes est TB ad BS ut BS ad BF sive BE, æquale erit rectang. EBT quadrato BS; & quater sumptum quadrato RS. Itaque quadr. SR cum quadrato LB æquale quadrato LT. Quadratum vero K (quod majus est quam RS quadr.) una cum eodem quadrato LB æquale est quadrato LG, uti ex constructione manifestum est, quia scilicet quadr. AG æquale positum fuit quadratis ex K & AB. Itaque majus est quadr. LG quam LT, & LG major quam LT, & BG

⁴²⁾ Voir, pour l'historique du problème, les p. 109 – 110 du Tome présent. La construction et la démonstration qui suivent en premier lieu se trouvent sous une rédaction différente aux p. 248 – 250 du T. I dans la pièce du 23 octobre 1653, envoyée à van Schooten. Sous la date du 11 février 1652 on trouve, p. 32 – 37 du Tome présent, une rédaction plus primitive, précédée de l'analyse qui l'a produite.

carré SR avec le carré LB est égal au carré LT. Mais le carré K (qui est plus grand que le carré RS) pris avec le même carré LB est égal au carré LG, ainsi qu'il est clair par la construction, parce que, en effet, le carré AG fut posé égal aux carrés de K et AB. Donc le carré LG est plus grand que le carré LT, et LG plus grand que LT, et BG que BT. Pour cette raison la circonférence décrite sur BG, capable de l'angle EAF, coupera la droite AS; car une circonférence semblable, si elle était décrite sur BT, toucherait la même droite au point S, puisque l'angle BST est égal à cet angle EAF et que le triangle BST est isocèle.

Ensuite, que CD est égal à K se démontrera ainsi. Puisque le carré AG est égal aux carrés sur K et AB, et de même le carré AG égal aux carrés AB, BG avec le double du rectangle GBL, à cause de cela le carré K fera égal au carré BG avec le double du rectangle GBL. Mais, comme BG à BE ainsi le carré BG avec le double du rectangle GBL est au rectangle GBE avec le double du rectangle EBL; en effet, ces parties sont séparément dans le même rapport. Donc aussi le carré K est au rectangle GBE avec le double du rectangle EBL comme BG à BE. Mais au rectangle GBE équivalent le rectangle CBD, parce que CB est à BG comme EB à BD, à cause des triangles semblables CBG, EBD; car ces triangles ont les angles en B égaux et l'angle BCG égal à l'angle BED. De même le carré AB est égal au double du rectangle EBL, puisque, en vertu des triangles semblables, comme SA, c'est-à-dire le double de BE, à AB ainsi AB est à BL. Donc, comme BG à BE ainsi sera le carré K au rectangle CBD avec le carré AB. Mais à ces deux-ci équivalent le rectangle CAD, parce que dans le triangle CAD l'angle A est coupé en deux parties égales par la ligne AB. Donc, comme BG à BE ainsi le carré K est au rectangle CAD. Et de là nous concluons ensuite de la même façon que dans le cas précédent, que la ligne DC est égale à cette ligne K, en répétant ⁴³⁾: Mais, comme GB à BE, etc.

Autre solution des deux problèmes précédents ⁴⁵⁾.

Soit donné le losange ADBC [Fig. 11], dont le côté DB est prolongé. Et soit donnée la ligne G. Il s'agit de mener une droite ANF, de façon que la partie interceptée NF soit égale à la droite donnée G.

⁴³⁾ Voir la p. 202 à commencer par la ligne 9 d'en bas.

⁴⁴⁾ Voir la p. 203 à commencer par la ligne 8 d'en bas.

⁴⁵⁾ La pièce N° XIII, p. 57—59 du Tome présent, contient sous la date du 16 août 1652 les mêmes constructions et démonstrations dans une rédaction peu différente. On les retrouve encore dans une lettre à van Schooten du 10 déc. 1653, p. 256—257 du T. I. Consultez, sur leur origine probable, la note 1, p. 57 du Tome présent.

Menons la diagonale AB, et soit le carré AH égal aux carrés de G et AB, et menons HE parallèle à cette diagonale BA. Plaçons encore AE égale à la droite G, et prolongeons la jusqu'en F. Je dis que NF est égale à cette même droite G.

Que l'on peut placer contre HE une droite AE égale à G, cela est évident par ceci. Le carré AH est plus grand que la somme des carrés AX et XH, parce que l'angle AXH est obtus. Mais le même carré AH est supposé égal aux carrés AB, ou HX, et G. Donc le carré G, ou AE, est plus grand que le carré AX. D'où il paraît que l'intersection E tombe entre les points H et X.

Prolongeons BD et plaçons une droite DR égale à BD même; soit RK parallèle à DA ou BC, et supposons que les droites FA, BA, HE prolongées la rencontrent aux points M, Q, K; enfin, joignons RA et prolongeons cette droite jusqu'en P.

Puisque DR est égale à DB, et que RQK est parallèle à DA, MA fera égale à AN et de même QA égale à AB; mais l'angle BAR est droit, parce qu'il est dans un demicercle, car les trois droites DB, DA, DR sont égales. Or, BQ et HEK sont parallèles; donc les angles en P sont droits, et aussi HP fera égale à PK. Donc le carré AH est égal au carré AE augmenté du rectangle HEK*. Mais le même carré AH est aussi égal aux carrés sur G, ou AE, et sur AB. Donc le carré AB fera égal au rectangle KEH. Et pour cette raison KE est à AB comme AB à EH. Or, comme KE à AB, ou QA, ainsi EM est à MA; et comme AB à EH ainsi AF à FE. Donc EM est à MA comme AF à FE: Et par suite EA à AM comme EA à EF. Donc EF fera égal à AM, et par conséquent à AN. Donc aussi FN est égal à AE, c'est-à-dire, à la droite donnée G. Ce qu'il fallait démontrer.

* 12.2. *Élém.* **)

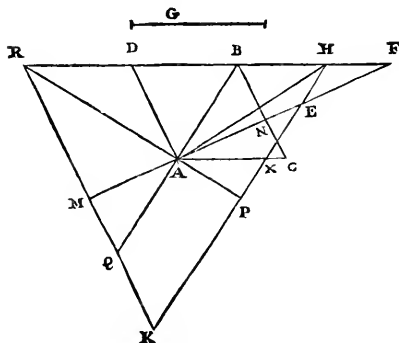
Soit de nouveau donné le losange ADBC [Fig. 12], dont les côtés BD, BC sont prolongés, et soit donnée la ligne G. Il s'agit de mener une droite NF passant par le sommet A, et qui soit égale à cette ligne G.

Traçons la diagonale BA, et plaçons y RAL à angles droits. Si donc G est donnée moindre que RL, le problème ne saurait être construit, ainsi qu'il fut déjà dit plus haut⁴⁷⁾. Et si elle est égale, on a déjà fait ce qui était demandé. Soit donc G plus grande que RL. Dans la figure ci-jointe la construction fera telle, qu'il fut proposé, et la démonstration la même que dans le cas précédent.

⁴⁶⁾ Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

Ducatur diameter AB, & quadratis ex G & AB sit æquale quadratum AH, & ducatur HE ipsi BA parallela. Et AE ipsi G ponatur æqualis, eademque producat ad F. Dico NF ipsi G æqualem esse.

Quod autem ad HE poni potest AE ipsi G æqualis, hinc manifestum est. Etenim quadratum AH majus est quadratis AX & XH, quum sit angulus AXH obtusus. Sed idem quadratum AH æquale ponitur quadratis AB seu HX & G. Itaque quadratum G seu AE majus est quadrato AX. Unde apparet intersectionem E accidere inter puncta H & X.



[Fig. 11.]

Producatur BD & ponatur ipsi æqualis DR. & sit RK parallela DA vel BC, eique occurrant productæ FA, BA, HE, in punctis M, Q, K: & jungatur RA, & producat ad P.

Quoniam igitur DR æqualis est DB, & RQK parallela DA, erit & MA æqualis AN, & QA æqualis AB; angulus autem BAR rectus, quum sit in semicirculo, nam tres hæ æquales sunt DB, DA, DR. Parallelae autem sunt BQ, HEK, ergo & anguli ad P recti, & erit HP æqualis PK. Est itaque quadratum AH æquale quadrato AE

unà cum rectangulo HEK*. Sed idem quadratum AH æquale est etiam quadratis ex G seu AE, & ex AB. Itaque quadr. AB æquale erit rectangulo KEH. Ac propterea KE ad AB ut AB ad EH. Verum ut KE ad AB seu QA ita est EM ad MA: & ut AB ad EH ita AF ad FE. Igitur EM ad MA ut AF ad FE: Et proinde EA ad AM ut EA ad EF. Æqualis est igitur EF ipsi AM; quare & ipsi AN. Ideoque & FN ipsi AE, hoc est, datæ G. Quod erat demonstrandum.

Sit denuo datus rhombus ADBC [Fig. 12], cujus producta latera BD, BC; & data sit linea G. Oportet ducere rectam NF transeuntem per angulum A, quæque æqualis sit ipsi G.

Ducatur diameter BA, eique ad angulos rectos RAL. Si igitur G minor detur quam RL, problema construi nequit, uti supra quoque dictum fuit 47). Si verò

47) Voir l'en-tête du problème, p. 205 du Tome présent.

* d'après le
livre 7. de Pappus⁴⁸⁾.

Mais ici doit être démontré d'une autre manière que l'on peut placer contre la ligne HE une ligne AE égale à G. Soit RS égale à RB, et joignons AS. Puisque dans le triangle BAS on a mené la droite AR du sommet au milieu de la base, les carrés BR et RA pris ensemble, c'est-à-dire le carré BA avec le double du carré AR, feront la moitié des carrés BA, AS^{*}. Par suite le double du carré AB avec le quadruple du carré AR, c'est-à-dire avec le carré RL, sera égal aux carrés BA, AS. De forte que, ayant retranché de part et d'autre le carré BA, le carré AS sera égal aux carrés BA et RL, et par conséquent moindre que le carré AH; car celui-ci est égal aux carrés AB et G. Donc AS est plus petite que AH. Mais elle est plus grande que AR. Donc le point S tombe entre R et H; car l'angle ARH est obtus. Par conséquent RH est plus grand que RS ou RB. Et comme, en vertu des triangles semblables, RH est à HP comme RB à BA, HP sera aussi plus grand que BA; et le carré HP plus grand que le carré AB. Mais le carré HP avec le carré PA est égal au carré AH, c'est-à-dire aux carrés BA et G. Donc, comme le carré HP est plus grand que le carré AB, le carré PA sera au contraire plus petit que le carré G. Il est donc clair que, si du point A comme centre on décrit une circonférence de rayon AE égal à G, elle coupera la ligne HE.

PROBL. VIII.

Trouver dans une conchoïde les limites de la courbure contraire⁴⁹⁾.

Nous connaissons la conchoïde qu'imagina Nicomède, par laquelle il divisa l'angle en trois parties égales⁵⁰⁾ et trouva aussi deux moyennes proportionnelles⁵¹⁾. Soit CQD [Fig. 13]⁵²⁾ cette ligne, G son pôle, et AB la règle à l'aide de

⁴⁸⁾ Il s'agit de la „Propositio CXXII” du „Liber VII” des „Mathematicae Collectiones”. On y lit (p. 234 verso de l'édition de Commandin): „Sit triangulum ABC, & ducatur quaedam recta linea AD, quae ipsam BC bifariam secet [in D]. Dico quadrata ex BA AC quadratorum ex AD DC dupla esse” (Hultsch, T. II, p. 856—857).

⁴⁹⁾ Voir, pour l'historique du problème, les p. 110—112 du Tome présent.

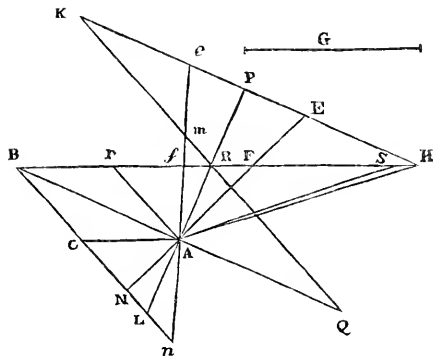
⁵⁰⁾ Voir la note 8, p. 86 du Tome présent.

⁵¹⁾ Voir la Pièce N° II, p. 13—15 du Tome présent.

⁵²⁾ Dans notre figure, reproduite par phototypie d'après l'original, la lettre D est renversée et la lettre O peu différente d'une C imparfaitement imprimée.

æqualis, jam factum est quod querebatur. Sit igitur G major quam RL . Erit in schemate adjecto, sicut propositum est, constructio & demonstratio eadem quæ in casu præcedenti.

Illud autem hic aliter est ostendendum, quod ad lineam HIE poni potest AE ipsi G æqualis. Sit RS æqualis RB , & jungatur AS . Quoniam igitur in trian-



[Fig. 12.]

quam AH . Sed major est quam AR . Ergo punctum S cadit inter R & H ; angulus enim ARH obtusus est. Major itaque est RH quam RS vel RB . Et quum propter triangulos similes sit RH ad HP ut RB ad BA , erit quoque HP major quam BA ; & quadratum HP majus quadrato AB . At quadratum HP cum quadrato PA æquatur quadrato AH , hoc est, quadratis BA & G . Ergo cum quadratum HP sit majus quadrato AB , erit invicem quadr. PA minus quam quadr. G . Patet igitur quod si centro A circumferentia describatur radio AE ipsi G æquali, ea lineam HIE secabit.

* per 122. lib.
7. Pappi ⁴⁹).

PROBL. VIII.

In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii ⁴⁹).

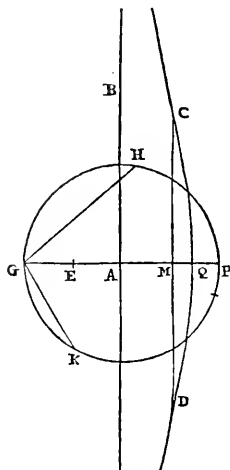
Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quæ & angulum dividit trifariam ⁵⁰), & duas medias invenit proportionales ⁵¹). Esto ea CQD ,

laquelle elle a été décrite, et que GQ coupe à angles droits. Telle est donc la propriété de cette ligne que, si l'on mène vers elle une droite quelconque du point G, la partie de cette droite comprise entre la conchoïde et la droite AB est égale à AQ.

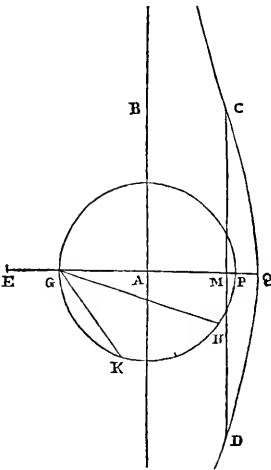
Or, puisqu'il apparaît qu'une certaine partie de la conchoïde, comme CQD dans la figure présente, est concave vers le pôle G; mais que la ligne restante, prolongée de part et d'autre par manière de dire jusqu'à l'infini, est courbée en sens contraire, on demande de quelle façon on pourrait déterminer les points où commence l'inflexion contraire. Et nous avons trouvé, en effet, pour cela la construction suivante.

Soit aux deux droites AG, AQ une troisième proportionnelle AE, à prendre du côté de G. Et plaçons GF égale à GE. Soit ensuite GR à angles droits sur GQ et égale au double de GA. Et décrivons la parabole RO, dont le sommet est R, l'axe RG et dont le paramètre est égal à AG. Du centre F et avec FR comme rayon décrivons une circonférence, qui coupe la parabole en O; et menons la droite OC, parallèle à AB, qui rencontre la conchoïde aux points C, D. Ceux-ci seront les points cherchés à la limite de la courbure contraire ⁵³).

Cette construction-là est générale. Mais si le carré sur AQ n'est pas plus grand que le double du carré AG, nous effectuerons aussi le problème par la trisection



[Fig. 14.]

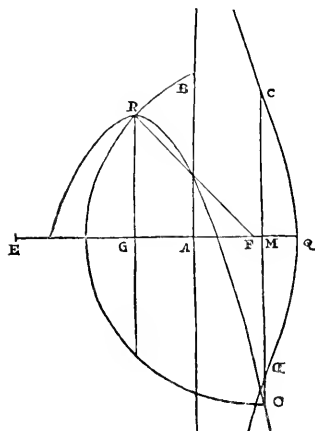


[Fig. 15.]

de l'arc ⁵⁴). Et cela de façon différente suivant que AQ sera plus grande ou plus petite que AG. Car si elle est plus petite, on décrira une circonférence du centre A [Fig. 14] avec le rayon AG, et on y placera GK égale au double de GE, trouvée comme ci-devant. On prendra ensuite GM égale à la droite GH, qui sous-tend le tiers de la circonférence KHG, et par M on mènera comme avant DC parallèle à AB. Mais si AQ est plus grande que AG [Fig. 15], les autres choses seront faites de la même façon, mais il y aura cette différence, qu'il faut diviser l'arc KP, qui avec l'arc GK complète une demi-circonférence, en trois parties égales, et déterminer une des parties PH, et prendre GM égale à la sous-tendue GH.

[Fig. 13] polus G, regula autem AB ejus ope descripta est; quam fecit GQ ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas est, ut ductâ ad ipsam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam AB intercepta sit ipsi AQ æqualis.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in schemate subiecto CQD versus polum G cavam esse, lineam verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diversum curvari; quæsitum est qua ratione puncta ea determinari possent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc sequentem invenimus constructionem.



[Fig. 13.]

Sit duabus AG, AQ tertia proportionalis AE, sumenda versus G. Et ponatur GF æqualis GE. Porro sit GR ipsi GQ ad angulos rectos, & æqualis duplæ GA. Et describatur parabola RO, cujus vertex sit R axis RG, latus rectum ipsi AG æquale. Centro autem F radio FR circumferentia describatur, quæ parabolam secet in O; & ducatur OC parallela AB occurratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæsitæ in confinio flexionis contrariæ⁵³⁾.

Ista autem Universalis est constructio. At quando quadratum ex AQ non majus est quam duplum quadrati AG, arcus trisectione propositum quoque efficiemus⁵⁴⁾. Et diversè quidem prout AQ major vel minor erit quam AG. Etenim si minor, describenda est circumferentia centro A [Fig. 14] radio AG, in eaque ponendo GK æqualis duplæ GE, inventæ ut priùs. Et rectæ GH quæ subtendit trientem circumferentiæ KHG æqualis sumenda GM, & per M ducenda ut ante DC ipsi AB parallela. Cum vero AQ major est quam AG [Fig. 15], ceteris ad eundem modum compositis, hæc tantum differentia erit quod arcum KP, qui unâ cum arcu GK semicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam constituere PH, & subtentæ GH æqualem sumere GM.

⁵³⁾ Cette construction date du 25 septembre 1653, puisqu'on la retrouve avec l'analyse qui l'a amenée dans la pièce N° XX, p. 83—85 du Tome présent.

⁵⁴⁾ Les deux constructions qui suivent se retrouvent dans la même pièce du 25 septembre 1653 aux pages 85 et 86.

Ensuite le problème est plan ⁵⁵⁾ lorsque AG égale AQ . Alors en effet il faut que GM soit égal au côté du triangle équilatère inscrit dans le cercle. De même lorsque le carré AQ est double du carré AG : alors, en effet, GM est double de GA .

Mais il fera encore plan dans d'autres cas innombrables, dont on pourra aisément distinguer ceux, qui se réduiront à la trisection de l'angle.

F I N.

⁵⁵⁾ La considération des cas où le problème devient plan manque encore dans la pièce N° XX (p. 83—86 du Tome présent); mais on la trouve déjà dans une lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (p. 246 du T. I). De plus on y rencontre, comme aussi dans la pièce N° XX, mais biffée depuis, la remarque que, dans un certain sens, le problème serait toujours plan au cas où il se laisse exécuter à l'aide de la trisection de l'angle, puisqu' alors cette trisection pourrait s'accomplir à l'aide de la conchoïde même, qu'on suppose tracée. Sur cette remarque on peut consulter l'avant-dernier alinéa de la p. 7 du Tome présent, la note 10, p. 86 et la note 4, p. 232 du même Tome.

Porro planum est Problema ⁵⁵⁾ cum AG æqualis AQ. Tunc enim GM fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inferipti. Item cum quadratum AQ duplum est quadrati AG : fit enim GM dupla ipsius GA.

Sed & aliis casibus innumeris planum erit, quorum ii quidem faciliè discerni poterunt, qui ad anguli trisectionem reducuntur.

ERRATA ⁵⁶⁾.

Pag. 1. lin. 2. post *portioni*, interpone *semicirculo minori*. Item tribus hisce locis, Pag. 1. lin. 7. Pag. 3. lin. 3 à fine. Pag. 4. lin. 1. post *portio*, lege *semicirculo minor*. Pag. 30. in fig. mutetur P. in B. Pag. 43. lin. penult. lege 31415926533. Pag. 44. lin. 5. pro 3144. lege 3145.

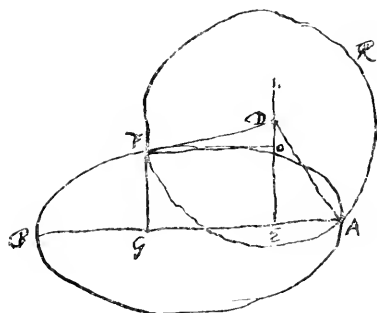
FINIS.

⁵⁶⁾ De ces „errata” nous avons tenu compte dans le texte; voir la note 1, p. 120, qui se rapporte aux pages 121 et 123; la figure 16, p. 161 et la page 179, l. 23 et l. 27.

APPENDICE I¹⁾

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.”.

SEPTEMBRE 1657.



[Fig. 1.]

*Quomodo data qualibet Ellipsi duae
mediae inter duas datas inveniri queant²⁾.
Et quomodo brevissimè per Ellipsin
cujus latus transv. sit triplum lateris
recti³⁾.*

[PREMIÈRE PARTIE.]

1657. Sept. ⁴⁾

AFB est Ellipsis
AFR est circulus

¹⁾ La pièce est empruntée aux pages 2 et 3 du manuscrit N°. 13. Nous l'avons divisée en deux parties.

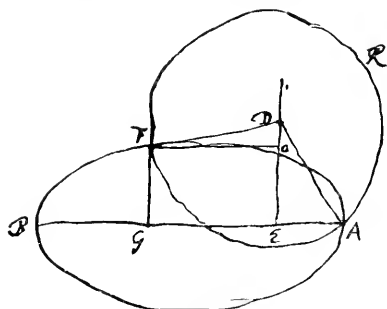
²⁾ Voir la première partie qui contient la solution générale du problème de trouver les deux moyennes entre deux lignes données à l'aide d'une ellipse quelconque donnée d'avance.

Remarquons tout de suite que dans cette première partie la construction ne s'achève pas par l'ellipse donnée mais par une autre qui lui est semblable; mais il est clair que, par un artifice facile à deviner et qu'on trouve indiqué dans la seconde partie (p. 221), la construction peut être accommodée à l'ellipse même que l'on considère comme donnée.

³⁾ Voir la seconde partie.

⁴⁾ La date précise de l'invention de la construction qui va suivre est le 8 septembre 1657, comme cela résulte des pages 14-17 d'un petit livret où Christiaan Huygens a annoté sur la

AB $\propto a$; l. rect. $\propto b$; AE $\propto c$; ED $\propto d$; AG $\propto x$ 5).



[Fig. 1.]

$$\frac{a - x \text{ BG}}{x \text{ GA}}$$

l. transf. a ad l. rect. b ut $ax = xx$

$$\text{ad } \frac{bax - bxx}{a} \text{ q.}^m \text{ GF}$$

$$\text{fit } r \propto \sqrt{\frac{bax - bxx}{a}} \propto \text{GF} \propto \text{EO}$$

$$\text{q.}^m \text{ AE q.}^m \text{ ED} \quad \text{q. FO}$$

$$cc + dd \propto xx - 2cx + cc + \\ + dd - 2dr + \frac{bax - bxx}{a} \text{ q.}^m \text{ DO}$$

$$r \propto \frac{xx - 2cx + bx - \frac{bxx}{a}}{2d}$$

$$r \propto \frac{axx - bxx - 2acx + abx}{2ad}; \text{ fit } a - b \propto q, 2c - b \propto p$$

$$r \propto \frac{qxx - pax}{2ad}$$

$$rr \propto \frac{abx - bxx}{a} \propto \frac{qqx^4 - 2qapx^3 + aappxx}{4aadd}$$

$$x^3 - \frac{2ap}{q}xx + \frac{aapp}{qq}x + \frac{4addb}{qq}x - \frac{4aaddb}{qq} \propto 0; \text{ fit } \frac{ap}{q} \propto n; \frac{a}{q} \propto \frac{n}{p}$$

première page: „Philippi Hugenij dum viveret”. C’est son frère Philippe qui mourut le 14 mai 1657.

Or, aux pages citées, on retrouve, sous cette date du 8 septembre 1657, dans une forme moins bien arrangée, tous les calculs et la construction même de la première partie de la pièce présente avec la conclusion: Possumus igitur inter datas duas rectas, invenire duas medias proportionales, cujuslibet ellipsis datae ope. Sed commodissime si latus transversum fuerit triplum lateris recti.

On trouve encore aux pages 16, 22 et 29 du même manuscrit des calculs qui se rapportent au problème analogue où l’ellipse est remplacée par une hyperbole.

⁵⁾ Partant de ces données, Huygens va déduire l’équation cubique qui détermine les abscisses des points d’intersection avec l’ellipse d’un cercle passant par le sommet A.

$$x^3 - 2nxx + mnx + \frac{4nddb}{pq}x - \frac{4mddb}{pp} \propto 0^6).$$

rejeitur secundus terminus ponendo $x = \frac{2}{3}n \propto y$

$$y^3 - \frac{1}{3}nny + \frac{4nddb}{pq}y + \frac{2}{27}n^3 + \frac{n}{3} \frac{mddb}{pq} - \frac{4mddb}{pp} \propto 0$$

ut eliminetur terminus sub y fit $\frac{1}{3}nn \propto \frac{4nddb}{pq}$.

$$\frac{1}{3}n \propto \frac{1}{3} \frac{ap}{q} \propto \frac{4ddb}{pq}; \frac{1}{12} \frac{app}{b} \propto dd; \frac{1}{12} \frac{aqqn}{aab} \propto dd.$$

$$\text{Sit } v \propto \frac{1}{3}n; \frac{3}{4} \frac{qqvv}{ab} \propto dd.$$

$$y^3 \propto \frac{1}{3}ann - \frac{n}{27}n^3$$

$$y^3 \propto 3avv = 8y^3 \text{ fit } 3a - 8v \propto s; a \propto \frac{1}{3}s + \frac{n}{3}v$$

$$y^3 \propto vrs$$

Ergo y^3 ad y^3 ut s ad v 7).

Ellipsoes I. tr. AB

latus rectus $\propto b$

$s \propto$ major datarum; $v \propto$ minor

oportet inter ipsas invenire duas medias proportionales

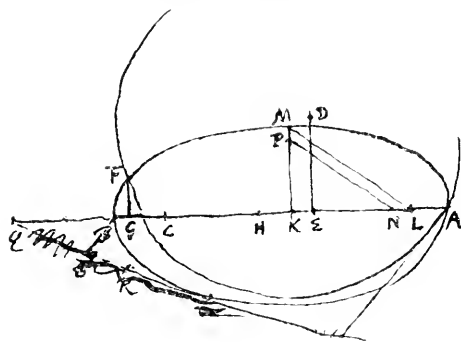
$$\frac{qn}{a} \propto p \propto 2c - b; qn \propto 2ac - ab; 3qv \propto 2ac - ab; \frac{3}{2} \frac{qv}{a} + \frac{1}{2}b \propto c$$

$$\frac{3}{4} \frac{qqvv}{ab} \propto dd; \frac{1}{3}s + \frac{n}{3}v \propto 3v + \frac{s-v}{3} \propto a.$$

⁶) L'équation cubique étant trouvée Huygens la réduit, dans ce qui suit, à la forme binomiale.

⁷) Ainsi $y = x - \frac{2}{3}n = AG - 2v$ est une des moyennes proportionnelles entre v et s . Il ne s'agit donc plus que d'arranger la construction de manière qu'on puisse partir des valeurs de v et s comme données; mais, puisqu'on a: $a = \frac{1}{3}s + \frac{n}{3}v$ et que l'on connaît le rapport $b:a$, il est permis dès l'abord de traiter a et b et aussi $q = a - b$ comme données. On doit donc exprimer dans ces données a, b, q, v et s les valeurs de $AE = c$ et $ED = d$; ce qui permettra de tracer le cercle et de trouver la moyenne proportionnelle y .

Constructio universalis data qualibet Elliptici [Fig. 2].



[Fig. 2.]

HQ $\propto s$, HC $\propto v$, CB $\propto \frac{1}{3}$ CQ, CA $\propto 3v \propto 3$ CH⁸⁾.
 AL $\propto \frac{1}{2} b$, BK $\propto KA$, Ergo
 KL $\propto \frac{1}{2} q$, BA ad AC ut
 KL ad LE $\propto \frac{3}{2} \frac{qv}{a}$, KP \propto
 $\propto HC \propto v$, PN parall. ML,
 ED $\propto \frac{1}{3} KN$ q.¹⁰⁾ \propto
 $\sqrt{\frac{3}{4} \frac{qqvv}{ab}} \propto d$.

D est centr. circuli AF.
 FG perp. BA, HG est minor
 duarum mediarum $\propto y$ ¹⁰⁾.

[SECONDE PARTIE].

Si ponatur $b \propto \frac{1}{3} a$ Erit $q \propto \frac{3}{2} a$. Quia $\frac{3qqvv}{4ab} \propto dd$; $\frac{4}{3} \frac{davy}{aa} \propto vv \propto dd$; $v \propto d$.

Et quia $\frac{3}{2} \frac{qv}{a} + \frac{1}{2} b \propto c$ erit $v + \frac{1}{2} b \propto c$; $v + \frac{1}{3} a \propto c$.

Ergo in Ellipsi ejus latus transversum triplum est lateris recti. Sumitur AL $\propto \frac{1}{2} AB$ ¹¹⁾. LE $\propto v \propto HC$, (nam sic fit AE $\propto v + \frac{1}{3} a \propto c$). Et ED $\propto \propto EL \propto v$ ¹²⁾.

⁸⁾ De cette manière $a = AB = CB + CA = \frac{1}{3}(s-v) + 3v$.

⁹⁾ On a, par construction, $KN = KL \times KP$; $MK = \frac{1}{2} vq$; MK; mais:

1. trans. $(a) = l. \text{ rect. } (b) = KB \times KA (\frac{1}{3} a^2)$; MK^2 ;

donec $MK^2 = \frac{1}{4} ab$; $KN^2 = \frac{1}{4} v^2 q^2$; $\frac{1}{4} ab = v^2 q^2$; ab et enfin $ED^2 = \frac{3}{4} q^2 v^2$; $ab = d^2$.

¹⁰⁾ On a, en effet, $HG = AG - AH = x - (AC - CH) = x - 2v = x - \frac{2}{3} v = y$.

¹¹⁾ Voir encore la Fig. 2. Les points A et B sont supposés construits d'après les indications qu'on trouve au début de la „Constructio universalis“.

¹²⁾ On retrouve cette construction sous une forme plus achevée dans la lettre du 12 octobre 1657 à de Sluse (p. 67 du T. II), et sur une feuille détachée où elle est comme il suit:

„mea Constructio.

HQ [voir toujours la figure 2 du texte] major, HC minor extremarum. CB $\propto \frac{1}{3}$ CQ
 HA $\propto 2$ HC. BMA elliptis axe BA, latere recto $\propto \frac{1}{3}$ BA. AL $\propto \frac{1}{2} AB$ five $\frac{1}{2} l$.
 rect, LE $\propto HC$, ED $\propto HC$ perpend. AB. AF est circulus centro D.

FG perpend. AB. HG est minor duarum mediarum.”

Data autem certa primum Ellipfi et dein duabus quibuscumque rectis RS, RT [Fig. 3], inter quas duae mediae sint reperiendae. Oportet sumere SV $\propto \frac{1}{3}$ differentiae ST. Et RX $\propto 2$ SR. Tum BA diameter secunda [Fig. 2] est proportionaliter in C et H sicut VX [Fig. 3] in S et R secta est, unde etiam inventa mediâ HG [Fig. 2] oportet facere sicut HC ad HG ita RS [Fig. 3] ad RY. Eritque RY minor mediarum inter RS, RT. Et hoc ad utramque constructionem pertinet ¹³⁾.

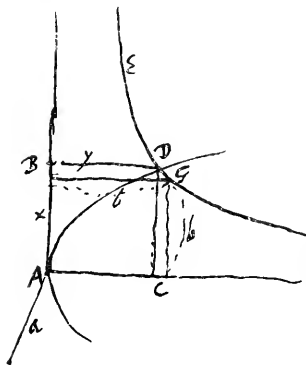
¹³⁾ C'est-à-dire : l'artifice employé ici (et dont nous avons déjà parlé dans la note 2) peut servir aussi pour la construction universelle de la première partie.

APPENDICE II¹⁾

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.”

[1657].

Miratus sum aliquando, qua ratione veteres in constructiones eas inciderint, quae fiunt per intersectionem duarum conicarum sectionum²⁾. Puto autem hac ratione inventas esse.



[Fig. 1.]

Primum ad cubi duplicationem est hujusmodi aequatio $x^3 \propto abb$. Ergo $\frac{xx}{a} \propto \frac{bb}{x}$. Sit $y \propto \frac{xx}{a}$; $ay = xx$. Ergo et $\frac{bb}{x} \propto y$; $bb \propto xy$.

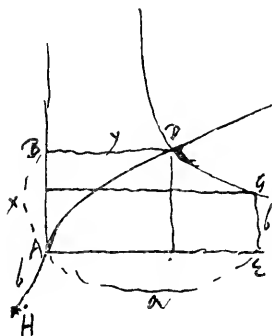
Descripta ad axem AC parabola AD cujus latus rectum $\propto a$, ductaque AB perp. ad AC apparet si sumatur in ea quaelibet longitudo AB $\propto x$. fore BD, quae parallela est AC, $\propto y$, ex aequatione $ay \propto xx$. At ex altera aequatione $bb \propto xy$, apparet, sumpta x pro arbitrio, quoniam $\square^m xy$ five AB, BD $\propto xy$, fore D ad hyperbolam in asymptotis AB, AC, per

¹⁾ La pièce est empruntée aux pages 4 et 5 du manuscrit N^o. 13. Huygens y donne plusieurs solutions du problème des deux moyennes proportionnelles.

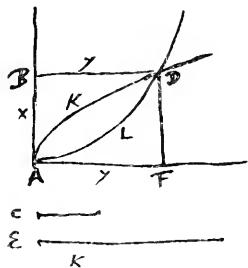
²⁾ Comparez la p. 191 du Tome présent au début du Probl. III. Il s'agit surtout des deux solutions de Ménechme, qu'on trouve p. 20—21 du texte Latin des Commentaires d'Eutocius de l'édition de Bâle, citée T. XI, p. 274, note 3 (Heiberg, T. III, p. 92—99).

angulum G, qu. bb . Sed x in utraque aequatione est eadem. Ergo parabolae et hyperbolae intersectio determinat punctum D, ut fiat DC, vel AB $\propto x$.

b ad x ut $\frac{xx}{b}$ ad a ; AB est media proxima extremæ b . BD autem non est altera mediarum ³⁾, sed hæc facile invenitur.



[Fig. 2.]



[Fig. 3.]

$$\text{Aliter. } x^3 \propto abb; y \propto \frac{xx}{b} \propto \frac{ab}{x} \propto y;$$

$$by \propto xx \quad ab \propto xy$$

datae sunt AH $\propto b$. AE $\propto a$ \angle BAE rectus. AD est parab. à latere recto b . DG est hyperbole per G. facto rectangulo AG $\propto ab$. Mediae sunt AB, BD.

Hæc Menechmi est Constructio⁴⁾ itemque altera quae sequitur⁵⁾.

$$x^3 \propto abb; x^4 \propto abbx; \frac{x^4}{bb} \propto ax.$$

$$y \propto \frac{xx}{b} \propto \sqrt{ax} \propto y$$

$$by \propto xx \quad ax \propto yy$$

C et E sunt datae. \angle BAF rectus. AKD parabola à latere recto b . ALD parabola à latere recto a . mediae AB, AF⁵⁾.

³⁾ Comparez la solution suivante où les deux moyennes sont indiquées immédiatement toutes les deux par le point d'intersection.

⁴⁾ C'est la première de ses solutions.

⁵⁾ C'est la seconde solution de Ménéchme.

$$x^3 \propto abb; ax^3 \propto aabb$$

$$yy \propto ax \propto \frac{aabb}{xx} \propto yy$$

$$\frac{ab}{x} \propto y; ab \propto xy$$

Hyperbole eadem quae superius in prima Menechmi contrafectione, Parabola vero à latere recto a .

Hanc methodum postea ulterius excolens inveni solidorum omnium problematum contrafectiones meliores ijs quas docet Slusius in Mesolabo. Exemplum dedi in problemate illo Apollonij Pergei, de brevissima recta a dato puncto ad confectionem ducenda ⁶⁾.

⁶⁾ Ce dernier alinéa doit dater de 1682. Huygens fait allusion à un ouvrage inédit intitulé: „Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos Locos”, que nous publierons à sa propre place.

APPENDICE III¹⁾

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.”

[JUILLET 1659].

[PREMIÈRE PARTIE].

De inveniendis duabus medijs proportionalibus.

$$x^3 \propto abb; x^4 \propto abbx; \frac{x^4}{bb} \propto ax$$

$$\text{addatur utrinque } -\frac{2cax}{b} + cc$$

$$yy \propto \frac{x^4}{bb} - \frac{2cax}{b} + cc \propto ax - \frac{2cax}{b} + cc \propto yy$$

$$y \propto \frac{ax}{b} - c$$

¹⁾ La pièce, que nous avons divisée en quatre parties, est empruntée à quelques feuilles qui ont été détachées par Huygens du livre A des *Adversaria*. Le revers de la dernière feuille porte la date du 28 juillet 1659; il contient des calculs que nous mentionnerons plus bas dans la note 11 de l'Appendice IV, p. 235 du Tome présent.

En composant cette pièce, Huygens s'est appliqué surtout à retrouver par l'analyse les constructions exposées par de Sluse dans la première édition de son „*Mesolabum seu duae mediae proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exhibitae. Accedit problematum quorumlibet solidorum effectio per eadem curvas, iisdem modis & appendix de eorum solutione per circulum et parabolam*, Leodij Eburorum. Typis L. F. van Milst. CIO IDC LIX”, in 4°. Voir sur cette édition la note 65, p. 105 du Tome présent.

Sit $2c \propto b$

$$y \propto \frac{xx}{b} - \frac{1}{2}b; \mid \sqrt{by + \frac{1}{2}bb} \propto x. \text{ Parabola.}$$

$$xx \propto ax + \frac{1}{4}bb - yy; x \propto \frac{1}{2}a + \mid \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - yy}. \text{ Circulus.}$$

Modus 1. Constructio Cartesij²⁾).

$$\frac{x^4}{bb} \propto ax$$

$$yy \propto \frac{x^4}{bb} - \frac{2axx}{b} + aa \propto ax - \frac{2axx}{b} + aa \propto yy$$

$$y \propto a - \frac{xx}{b}; xx \propto ab - by; x \propto \mid \sqrt{ab - by} \text{ Parabola}$$

$$\frac{abx + aab - byy}{2a} \propto ax; \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}ab - \frac{byy}{a} \propto ax; \frac{1}{4}b + \sqrt{\frac{1}{16}bb + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}a} \propto x$$

Ellipsis.

Modus 2.

$$yy \propto \frac{x^4}{bb} - 2xx + bb \propto ax - 2xx + bb \propto yy$$

$$y \propto \frac{xx}{b} - b; by + bb \propto xx; \mid \sqrt{by + bb} \propto x \text{ Parabola}$$

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}yy \propto ax; \frac{1}{4}a + \mid \sqrt{\frac{1}{16}aa + \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}yy} \propto x \text{ Ellipsis}$$

²⁾ Il s'agit de la construction, à l'aide du cercle et de la parabole, donnée par Descartes au Livre III de sa „Géométrie” (p. 469–470 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) sous le titre „L'invention de deux moyennes proportionnelles.” En effet, on vérifie aisément que la construction amenée par les formules du texte est identique avec celle de Descartes. Après ce premier succès de la méthode analytique qu'il vient de découvrir, Huygens procède à en chercher de nouvelles applications.

axis min. $\sqrt{\frac{1}{4}aa + 2bb}$; l. [atus] r. [ectus] $\propto \sqrt{\frac{1}{8}aa + bb}$; l. tr. $\propto \sqrt{\frac{1}{2}aa + 4bb}$
recti scilicet duplum.

Modus 3. Optima ³⁾

$$4yy \propto \frac{x^4}{bb} - 4xx + 4bb \propto ax - 4xx + 4bb \propto 4yy$$

$$2y \propto \frac{xx}{b} - 2b; \sqrt{2by + 2bb} \propto x \text{ Parabola}$$

$$\frac{1}{4}ax + bb - yy \propto xx; \frac{1}{8}a + \sqrt{\frac{1}{8}aa + bb} - yy \propto x \text{ circulus}$$

Modus 4.

$$\frac{1}{4}yy \propto \frac{x^4}{bb} - \frac{1}{4}xx + \frac{1}{16}bb \propto ax - \frac{1}{4}xx + \frac{1}{16}bb \propto \frac{1}{4}yy$$

$$\frac{1}{2}y \propto \frac{xx}{b} - \frac{1}{8}b; \frac{1}{2}by + \frac{1}{8}bb \propto xx; \sqrt{\frac{1}{2}by + \frac{1}{8}bb} \propto x \text{ parabola.}$$

$$4ax + \frac{1}{16}bb - yy \propto xx; 2a + \sqrt{4aa + \frac{1}{16}bb} - yy \propto x \text{ circulus}$$

Modus 5.

$$4yy \propto \frac{x^4}{bb} - 2xx + bb \propto ax - 2xx + bb \propto 4yy$$

$$2y \propto \frac{xx}{b} - b; \sqrt{2yb + bb} \propto x \text{ parabola}$$

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bb - 2yy \propto xx; \frac{1}{4}a + \sqrt{\frac{1}{16}aa + \frac{1}{2}bb} - 2yy \propto x \text{ Ellipsis}$$

³⁾ Probablement Huygens préfère cette construction à la précédente à cause de la relation entre l'axe et le paramètre de l'ellipse; ce qui permettrait d'exécuter toutes les constructions de moyennes proportionnelles à l'aide d'une seule ellipse construite d'avance, c'est-à-dire, en se servant de l'artifice mentionné dans la note 2, p. 217 du Tome présent.

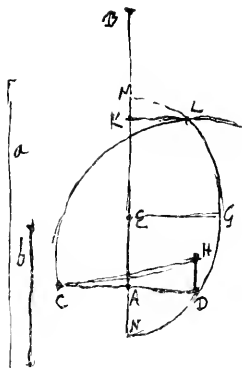
maj. axis $\sqrt{\frac{1}{3}aa + 2bb}$; $\sqrt{\frac{1}{2}aa + 4bb}$ l. r.; $\sqrt{\frac{1}{3}aa + bb}$ l. r.

Modus 6.

Ex his duobis modis fit constructio folio sequenti verfo ⁴⁾).

$$\begin{aligned} \frac{ccyy}{bb} &\propto \frac{x^4}{bb} - \frac{ccxx}{bb} + \frac{1}{4} \frac{c^4}{bb} \propto ax - \frac{ccxx}{bb} + \frac{1}{4} \frac{c^4}{bb} \propto \frac{ccyy}{bb} \\ cy &\propto xv - \frac{1}{2} cc; \sqrt{cy + \frac{1}{2} cc} \propto x \text{ parabola quaelibet} \\ yy &\propto \frac{bbax}{cc} - xv + \frac{1}{4} cc; xv \propto \frac{bbax}{cc} + \frac{1}{4} cc - yy; x \propto \frac{abb}{cc} + \\ &+ \sqrt{\frac{1}{4} \frac{aab^4}{c^4} + \frac{1}{4} cc - yy} \text{ circulus} \end{aligned}$$

Modus 7.



[Fig. 1.]

Ex modo 4^o et 6^o haec inventa est confr^o. ⁵⁾
 AB[a] maj. CD[b] min. extremarum. CA \propto AD.
 \angle BAD rectus.
 AE $\propto \frac{1}{4}$ AB; EN vel EM qu. \propto qu. EA + 2 qu. AD.
 EG qu. $\propto \frac{1}{2}$ qu. EM.
 NGM est ellipsis, axis MN.
 DH $\propto \frac{1}{2}$ AE $\propto \frac{1}{8}$ AB.
 CL est circulus centro H.
 Intersectio L. LK perpend. AB. AK est minor
 duarum mediarum.
 NB. hinc data ellipsi cujus latus rectum sit dimidium
 transversi inter datas extremas duae mediae facili
 constructione habentur.

⁴⁾ Voir plus loin, à la page présente, après le „modus 7“. Il s'agit des „modus 4 et modus 6“.

⁵⁾ Voici comment: Les paraboles des modes 4 et 6 sont égales, mais leurs sommets se trouvent sur l'axe des y à des distances inégales b et $\frac{1}{2}b$ de l'origine des coordonnées. Si donc on fait subir la première parabole avec le cercle qui la coupe une translation $\frac{1}{2}b$ dans la direction de l'axe des y, elle couvrira la seconde parabole et le point d'intersection avec le cercle tombera nécessairement sur celui de la seconde parabole avec l'ellipse, puisque ces points doivent avoir la même distance à l'axe des y, laquelle distance est égale à la moyenne cherchée. On peut donc

$$\begin{aligned}
 yy & \propto \frac{x^4}{bb} - \frac{cax}{b} + \frac{1}{4}cc \propto ax - \frac{cax}{b} + \frac{1}{4}cc \propto yy \\
 y & \propto \frac{xx}{b} - \frac{1}{2}c; \quad | \quad by + \frac{1}{2}bc \propto x \text{ parabola} \\
 \frac{bax + \frac{1}{4}ccb - byy}{c} & \propto ax; \quad \frac{ab}{c} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{aabb}{cc} + \frac{1}{4}cb - \frac{b}{c}} \propto x \text{ Ellipsis quaelibet}
 \end{aligned}$$

Modus 8.

Ex hoc modo et primo, oritur Constructio universalis Slusij ⁶⁾, per circulum et elliptin. Ex eo quod utriusque parabolam latus rectum est idem nempe $\propto b$.

[SECONDE PARTIE].

Secare AD in C, ut fit qu. QA ad qu. AC ut AC ad CD ⁷⁾.

$$aa \text{ ad } ax \text{ ut } x \text{ ad } b - x$$

$$x^3 \propto aab - aax$$

$$x^4 \propto aabx - aaxx$$

$$x^4 \propto bx - ax$$

$$aa \propto bx - ax$$

$$yy \propto \frac{x^4}{aa} \propto bx - ax \propto yy$$

$$y \propto \frac{xx}{a}; \quad ay \propto ax; \quad | \quad \overline{ay} \propto x \text{ parabola}$$

$$bx - ax \propto yy; \quad bx - yy \propto ax; \quad \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - yy} \propto x \text{ circulus}$$

[Fig. 2.]

supprimer la parabole et déterminer ce point d'intersection à l'aide de l'ellipse et du cercle, pourvu que le centre du cercle du mode 4 soit déplacé sur une distance $\frac{1}{2}b$; ce qui amène facilement la construction du texte. Toutefois Huygens n'est pas encore satisfait, puisque la „Propositio Prima” de de Sluse apprend de construire la moyenne cherchée à l'aide d'un cercle et d'une ellipse „in infinitis modis”, c'est-à-dire à l'aide d'une infinité d'ellipses *différentes*. C'est pourquoi il procède au mode 8, où une constante arbitraire est introduite.

⁶⁾ La „Propositio prima” citée dans la note précédente, qu'on trouve à la page 3 de la première et de la seconde édition du „Mesolabum”. On l'obtient en effet par l'artifice même exposé dans la note précédente, en observant que la parabole du „modus 8” est égale, cette fois, à celle du mode 1.

⁷⁾ Dans sa „Propositio septima” (p. 27 de la première, p. 22 de la seconde édition du „Mesola-

$$yy \propto \frac{x^4}{aa} + \frac{cxx}{a} + \frac{1}{4}cc \propto bx - xx + \frac{cxx}{a} + \frac{1}{4}cc \propto yy$$

$$y \propto \frac{xx}{a} + \frac{1}{2}c; \sqrt{ay - \frac{1}{2}ac} \propto x \text{ parabola}$$

$$abx + \frac{1}{4}acc - ayy \propto axx - cxx; \frac{abx}{a-c} + \frac{1}{4} \frac{acc}{a-c} - \frac{ayy}{a-c} \propto xx; a-c \propto d;$$

$$\frac{1}{2} \frac{ba}{d} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{aabb}{dd} + \frac{1}{4} \frac{acc}{d} - \frac{ayy}{d}} \propto x \text{ Elliptis.}$$

Ex hoc et superiori oritur confr.° propositionis 7.^{ae} Slufij in Mefolabo.

[TROISIÈME PARTIE.]⁸⁾

$$aa \text{ ad } xx \text{ ita } x \text{ ad } x - b$$

$$x^3 \propto aax - aab. \text{ Aequatio trifectionis anguli } ^9).$$

$$\frac{x^4}{aa} \propto xx - bx$$

$$yy \propto \frac{x^4}{aa} - 2xx + aa \propto -xx - bx + aa \propto yy$$

$$y \propto \frac{xx}{a} - a; \sqrt{ay + aa} \propto x \text{ parabola}$$

$$-bx + aa - yy \propto xx; -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa - yy} \propto x \text{ Circulus.}$$

bum") de Sluse résolut ce problème à l'aide du cercle et d'une ellipse „in finitis modis". Huygens se propose de retrouver cette solution. A cet effet il commence à chercher une solution à l'aide du cercle et de la parabole; ensuite une autre par une parabole du même paramètre et d'une ellipse de figure quelconque. Après cela il supprime la parabole et il obtient la solution désirée.
⁸⁾ Dans cette troisième partie il s'agit de la „Propositio undecima" (p. 39 de la première, 31 de la seconde édition) de de Sluse, laquelle est comme il suit: „Datis duobus rectis P, Q, invenire tertium ut X, ad cuius quadratum, quadratum datæ P eandem habeat rationem, quæ est ipsius X, ad excessum X, supra Q." Ici encore le même artifice va conduire Huygens à la solution de de Sluse.

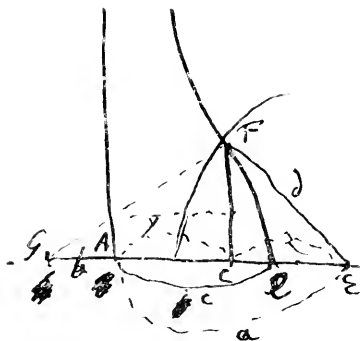
⁹⁾ Soit r le rayon du cercle, q la corde de l'arc de l'angle donné, x celle de la troisième partie de cet arc, alors: $x^3 = 3r^2x - qr^2$. Comparez le livre III de la „Géométrie" de Descartes, à l'article: „La façon de diviser un angle en trois" (T. VI, p. 470 de l'édition d'Adam et Tannery).

APPENDICE IV¹⁾ AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.”

[1659].

$$[GA \propto b; AQ \propto c; AE \propto a; FE \propto d; AC \propto y]^2)$$

$$q. CF \, dd - aa + 2 \, ay - yy \propto \frac{bbcc + 2bccy - bbyy + ccy - 2by^3 - y^4}{yy} \quad q. CF$$



[Fig. 1.]

$$\begin{aligned} 2 \, ay^3 + ddy - 2 \, bccy - bbcc &\propto 0 \\ 2 \, by^3 - acyy & \\ + bbyy & \\ - ccy & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^3 + ddy - 2 \, bccy - bbcc &\propto 0^4) \\ -aa & \\ +bb & \\ -cc & \\ 2a + 2b & \end{aligned}$$

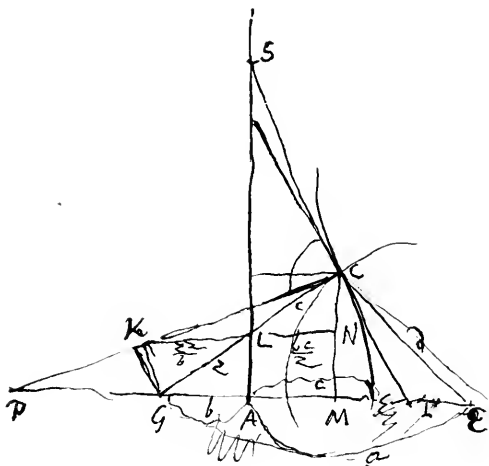
¹⁾ Cet appendice a été emprunté aux pages 123—131 du livre A des „Adversaria”. Il contient la solution d’août 1659 du problème „In conchoïde lineae invenire confinia flexus contrarii.” Voir, pour l’historique de cette solution, l’Avertissement à la page 110—111.

²⁾ Nous avons ajouté ces indications.

³⁾ Cette seconde valeur de CF² découle des propriétés de la conchoïde. On la retrouve p. 83 du Tome présent. Elle est égale à la première pour trouver l’équation cubique qui donne les intersections de la conchoïde avec un cercle ayant E pour centre.

⁴⁾ Cette équation cubique :

$$y^3 + \frac{d^2 - a^2 + b^2 - c^2}{2(a+b)} y^2 - \frac{bc^2}{a+b} y - \frac{b^2c^2}{2(a+b)} = 0$$



[Fig. 2.]

$$[GA \text{ (Fig. 2)} \propto b; \\ LC \propto c] \text{; } GL \propto z.$$

$$(GL) z \text{ ad } (LC) c \text{ ut} \\ GA(b) \text{ ad } AM \left(\frac{bc}{z} \right)$$

$$PA \propto \frac{z^3}{bc} + \frac{z}{b} + b \text{ (')})$$

$$MC \propto \sqrt{zz - bb} + \\ + \frac{c}{z} \sqrt{zz - bb} \text{ (')})$$

$$(PM) \frac{z^3}{bc} + \frac{z}{b} + b + \frac{bc}{z} \text{ ad}$$

$$(MC) \sqrt{zz - bb} + \\ + \frac{c}{z} \sqrt{zz - bb} \text{ ut } MC \\ \text{ad } MT$$

sera comparée plus loin avec celle qui détermine le point d'inflexion de la conchoïde. Remarquons tout de suite qu'on en peut faire disparaître le second terme en posant $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$; substituant ensuite $y = kx$, on peut identifier, par un choix convenable de k et de a l'équation obtenue avec une équation cubique quelconque sans second terme. On peut donc à l'aide des intersections d'un cercle et d'une conchoïde donnée d'avance, résoudre chaque problème menant à une équation cubique; pourvu seulement que la valeur obtenue de a satisfasse à l'inégalité $a^2 + c^2 > b^2$, ce qui n'est pas toujours le cas, et que de plus le cercle, qu'on obtient, coupe réellement la conchoïde donnée. Comparez la note 16 de la pièce présente et la note 10 p. 86 du Tome présent.

5) Ces notations, que nous avons ajoutées, correspondent avec celles de la figure précédente. Dans ce qui suit Huygens va calculer la valeur de AT , laquelle, au point d'inflexion, doit être maximale, CT étant la tangente de la conchoïde au point C .

6) La normale PC à la conchoïde est supposée avoir été construite d'après la manière qu'on trouvera décrite plus loin dans les „Contributions aux commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes”; c'est-à-dire le point K a été trouvé en tirant LK parallèle à PA et GK perpendiculaire à GC . On a donc, à cause de la similitude des triangles LNC et LKG , $LN \left(\frac{bc}{z} \right) : LC(c) = LG(z) : LK \left(\frac{z}{b} \right)$ et ensuite $LC(c) : CG(z + c) = KL \left(\frac{z}{b} \right) : PG \left(\frac{z^3}{bc} + \frac{z}{b} \right)$; donc $PA = PG + GA = \frac{z^3}{bc} + \frac{z}{b} + b$.

7) Puisqu'on a $MC = MN + NC$ où $MN = \sqrt{GL^2 - GA^2} = \sqrt{zz - bb}$ et $NC = \frac{c}{z} \times AL$ par similitude de triangles.

$$\text{MT} \quad \frac{zz - bb + \frac{2c}{z}zz - \frac{2c}{z}bb + cc - \frac{ccbb}{zz}}{\frac{z^3}{bc} + \frac{zz}{b} + b + \frac{bc}{z}}$$

$$\frac{z^4 - bbzz + 2cz^3 - 2cbbz + cczz - ccbb}{zz} \quad \text{div. } z + c$$

$$\frac{z^4 + cz^3 + bbccz + bbcc}{bcz} \quad \text{div. } z + c$$

$$\frac{bcz^3 + bcczz - b^3cz - b^3cc}{z^4 + bbcz} \quad \text{MT}$$

$$\text{AT} \propto \text{MT} + \text{AM} \propto \frac{bcz^3 + bcczz - b^3cz - b^3cc}{z^4 + bbcz} + \frac{bc}{z}$$

$$\frac{2bcz^3 + bcczz - b^3cz}{z^4 + bbcz}$$

$$\frac{2bczz + bccz - b^3c}{z^3 + bbc} \propto \text{maximum unde hinc per re-$$

gulam de max. et minimis ⁸⁾)

$$0 \propto 2bcz^5 + 2bccz^4 - 3b^3cz^3 - 4b^3cczz - b^3c^3z$$

$$0 \propto 2z^4 + 2cz^3 - 3bbzz - 4bbc - b^3cc \quad \text{div. } z + c$$

$$2z^3 - 3bbz - bbc \propto 0$$

$$z^3 - \frac{3}{2}bbz - \frac{1}{2}bbc \propto 0 \quad \text{hinc etiam constr. breviss. per.}$$

parab. ⁹⁾)

hi termini ex aequo. pag. 2. ¹⁰⁾)

$$2bcc \text{ ad } bbc \text{ ut } \frac{2}{3}bb \text{ ad } \frac{2}{3}b^3 \quad \left| \frac{\frac{3}{4}b^3}{\frac{1}{3}bbc} \right| \left| \frac{3b}{2c} \right| \left| \frac{p}{r} \right|^{11)}$$

⁸⁾ Il s'agit de la règle publiée dans l'ouvrage: „Demonstratio regulae de maximis & minimis” (voir T. IX, p. 95, note 1) pour trouver le maximum ou le minimum d'une fraction. En effet, cette règle appliquée à la dernière expression pour AT amène immédiatement l'équation qui va suivre.

⁹⁾ En effet, cette équation en $z = GL$ est plus simple que celle en $q = GM$ de la pièce N°. XX des „Travaux” de 1652 et 1653 (p. 84 du Tome présent). Consultez encore la note 5 de la même pièce N°. XX.

¹⁰⁾ C'est-à-dire, l'équation de la note 4.

¹¹⁾ Pour arriver à la construction désirée à l'aide de la conchoïde donnée et du cercle, il suffirait d'identifier l'équation cubique en z avec celle en y de la note 4, privée du second membre, en posant $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$. Or, cela est impossible, puisque le rapport du troisième au quatrième terme diffère dans les deux équations. On doit donc auparavant appliquer à l'équation en z la méthode enseignée par Descartes au Livre III de la „Géométrie” (p. 452 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) pour „multiplier ou diviser les racines sans les con-

$$\begin{array}{r}
z^3 - \frac{3}{2}bbz - \frac{1}{2}bbc \\
\frac{9}{4}bb \quad \frac{27}{8}b^3 \\
\frac{4}{8}cc \quad \frac{8}{16}c^3 \\
y^3 - \frac{27}{8}b^4 \quad y - \frac{27}{16}b^5 \quad \left| - \frac{bc^2}{a+b} y \text{ ex aequ. pag. 2}^{10} \right) \\
\frac{27}{8}b^3 \quad \frac{cc}{a+b} \\
27abbb + 27b^4 \quad \propto 8c^4 \\
a \propto \frac{8}{27} \frac{c^4}{bbb} - b \\
aa + cc - bb \propto d^2
\end{array}$$

noistre". De cette manière le rapport des deux derniers termes doit être changé dans la raison de $\frac{3}{4}b^3$ à $\frac{1}{2}bbc$, ou de $3b$ à $2c$; ce que Huygens achève par l'algorithme même donné par Descartes au lieu cité.

Ajoutons que sur une feuille détachée, datée du „28 Jul. 1659" (voir la note 1, p. 225 du Tome présent), Huygens a exposé la méthode qu'il a appliquée ici; on y lit:

„ $x^3 - bxx + aax - c^3 \propto 0$ Aequatio data. Volo autem habere aliam similem, cujus radix ad radicem hujus habeat rationem cognitam in qua quantitas 3^{ij} termini sit ad quantitatem 4^{ti} termini in data ratione d ad ce ."

A cet effet, appliquant l'algorithme de Descartes, il écrit l'équation désirée: $y^3 - \frac{brxy}{p} + \frac{aarry}{pp} - \frac{c^3r^3}{p^3}$; puis il calcule $\frac{r}{p}$ à l'aide de la proportion $\frac{aarr}{pp} : \frac{c^3r^3}{p^3} = d:ce$ et il fait suivre: „Ergo loco aequationis prioris $x^3 - bxx + aax - c^3$ ponenda est alia cujus radix $y \propto \frac{rx}{p}$ hoc est $\frac{aace}{dc^3} x$. Obtinebitur autem talis aequatio si multiplicemus hoc modo.

$$\begin{array}{r}
x^3 - bxx + aax - c^3 \\
1. \quad \frac{aace}{dc^3} \cdot \frac{a^4c^4}{ddc^6} \cdot \frac{a^6c^6}{d^3c^9} \\
y^3 - \frac{aacebyy}{dc^3} + \frac{a^6c^4y}{ddc^6} - \frac{a^6c^6c^3}{d^3c^9}
\end{array}$$

hi jam duo posteriores sunt inter se ut d ad ce ut facile apparet".

Après quoi il ajoute:

In constructionibus solidorum problematum magni usus.

¹²⁾ L'équation en y , obtenue par le procédé que nous venons d'indiquer, peut être identifiée maintenant à celle de la note 4. A cet effet Huygens égale les coefficients des termes en y ; l'égalisation des termes constants aurait d'ailleurs amené nécessairement la même relation $\frac{27b^3}{8cc} = \frac{cc}{a+b}$.

Constructio ad inveniendum radicem y ¹³⁾. Ut autem p ad r sive ut $3b$ ad $2c$ ita y ad z ¹⁴⁾. $\frac{p}{r} \propto y; z \propto \frac{ry}{p}$.

$\frac{8}{27} \frac{c^4}{b^3}$ est dimidium quintae prop. ¹⁵⁾ duarum $3b$ et $2c$, vel quinta prop. duarum $\frac{3}{2}b$ et c .

necesse est $8c^4 \left| \frac{15}{27} b^4 \right|$

$\frac{8}{27} \frac{c^4}{bbb} - b \left| \frac{bb}{2c} \right|$ vid. pag. 4 in fin. ¹⁶⁾

¹³⁾ En effet, pour trouver y , on n'a plus qu'à construire a et d d'après les formules du texte; à prendre ensuite (voir la figure 1) $AE = a$, à construire le cercle qui a E pour centre et d pour rayon et enfin à abaisser du point d'intersection F avec la conchoïde la perpendiculaire FC. Alors $AC = y$.

¹⁴⁾ Comparez la note 11. Il est clair qu'après cela la construction est facile à achever. On en trouve un résumé aux p. 200—201 du T. IX. Après avoir construit $y = AC$ (fig. 1), comme nous l'avons dit dans la note 13, on n'a qu'à prendre GL (fig. 2) égal à $z = \frac{2cy}{3b}$, ou bien GC à $(z+c)$.

Dans ce dernier cas on a encore à déterminer l'intersection de la conchoïde donnée avec un cercle ayant G pour centre et GC pour rayon. C'est la voie suivie dans le résumé mentionné qui fut envoyé le 27 août 1687 à Mr. H. Coets.

¹⁵⁾ Signe pour indiquer que $8c^4$ est plus grand que $27b^4$. Dans le cas contraire on obtiendra pour $a = AE$ (fig. 1) une valeur négative; ce qui en vérité n'importe guère. Plus tard Huygens a ajouté à ce propos: „videndum cum centrum E circuli est ex altera parte A, qualis tunc futura sit haec aequatio. 1680” Il s'agit de l'équation de la note 4.

¹⁶⁾ Voici ce qu'on trouve au lieu cité: „bona est constr. cum d radius potest secare conchoidem, hoc est cum $d+a$ major quam c .

$$\left| \sqrt{aa+cc-bb} + a \right| c$$

$$aa+cc-bb \left| cc-2ac+aa \right|$$

$$a \left| \frac{bb}{2c} \right|$$

Cette condition est donc bien plus importante que la précédente, puisqu'elle décide sur la réalité du point d'intersection F (fig. 1). Au cas où $a > c$, la condition $a+d > c$ est remplacée par $a-d < c$; mais les deux conditions peuvent être exprimées ensemble par $(a-c)^2 < d^2$, ce qui mène à la relation $c^5 - \frac{27}{8} cb^4 - \frac{27}{16} b^5 > 0$, ou bien, posant $b = kc$, $16 - 27k^4(k+2) > 0$, ce qui exige $k < 0,685 \dots$

On voit dès l'abord que cette condition est suffisante et on reconnaît facilement qu'elle

$$\frac{8}{27}c^4 - b^4 \left| \frac{b^5}{2c} \right|$$

$$8c^4 - 27b^4 \left| \frac{27}{2} \frac{b^5}{c} \right|$$

$$16c^5 - 54cb^4 - 27b^5 \propto 0$$

$$\text{determ}^0. \quad c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 \propto 0^{17})$$

bona est confr^o. cum b ad c ut 2 ad 3, non autem cum ut 20 ad 29¹⁸⁾.

est de même nécessaire, en remarquant que la relation $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$ exprime que la seule racine positive de l'équation $y^5 - \frac{27}{8c^2}y - \frac{27}{16c^2}b^5 = 0$ est inférieure à c ; voir encore la note 4, p. 202 du T. IX, où la même relation est déduite de cette manière.

¹⁷⁾ Lisez plutôt : $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$.

¹⁸⁾ Au premier cas $k = \frac{2}{3} = 0,666\dots < 0,685\dots$; au second $k = \frac{20}{29} = 0,689\dots > 0,685\dots$

AD
C. V. FRAN. XAVER. AINSCOM, S. I.
EPISTOLA.
1656.



Avertissement.

En composant son „*Εξέτασις Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio*” ¹⁾, Huygens avait espéré de pouvoir, par la lucidité de son exposition et la force de ses arguments, convaincre Grégoire lui-même de l'insuffisance de sa quadrature du cercle ²⁾.

Après la publication, en décembre 1651, il fut bientôt désappointé par l'attitude évasive de Grégoire, qui, nonobstant les insistances de plus en plus pressantes de Huygens, persista à réserver son jugement jusqu'au jour où il répondrait à tous ses adversaires à la fois ³⁾. Un moment alors Huygens se trouva sur le point de perdre patience. Ce fut lorsque dans le brouillon d'une de ses lettres à Grégoire il lui adressa, entre autres, l'allocution célèbre de Cicéron „Quousque tandem abuteris patientia nostra !” ⁴⁾. Mais il se reprend et se contente dans la lettre qu'il

¹⁾ Voir l'ouvrage reproduit aux pages 315 — 337 du Tome XI.

²⁾ Consultez le T. I aux pages 160 „Magna me spes tenet et tractandi ratione et argumentorum efficacia plenissimè tibi satisfactum fore”, 161 „Sin otium non fuit nec adhuc suppetet, intelliges tamen imposterum et ex aliorum sententiis, et ex adversarii propria ut spero confessione nihil me frustra hic movisse” et 166 „Breviter modo hanc confutationem institui, et praecipue in hoc operam dedi ut ipsi Patri Gregorio in veriore sententiam transcendendi necessitatem imponerem”.

³⁾ Voir les lettres de Huygens du 26 décembre 1651, du 24 janvier et du 15 mars 1652, pp. 159, 171 et 174 du Tome I, et les réponses de Grégoire du 6 janvier, du 18 février 1652 (placée par mégarde parmi l'année 1651) et du 6 avril 1652, pp. 164, 137 et 179 du Tome I.

⁴⁾ Voir le premier alinéa de la pièce N°. 122, p. 174 — 175 du T. I.

écrit de prier Grégoire emphatiquement de vouloir du moins lui indiquer en trois mots „combien de fois le rapport 53 à 203 contient le rapport 5 à 11 dans le sens de la 44^{ème} Proposition du Livre 10”⁵⁾.

C'est en effet de la réponse à donner à cette question que dépend la réduction à l'absurde qui constitue la partie principale de l'„Εξέτασις”⁶⁾. Une réponse numérique aurait permis de calculer, en admettant la justesse de la quadrature de Grégoire, la valeur du rapport de la circonférence du cercle au diamètre et d'en démontrer la discordance avec la valeur approchée bien connue de ce rapport. Au lieu de cela Grégoire renvoie⁷⁾ à un ouvrage d'un de ses élèves, le père de Sarasa⁸⁾, d'où il suit, en effet, que le sens que Grégoire veut donner à l'expression „contenir” se trouve être celui même que nous avons suggéré dans la note 28 de la page 280 du Tome XI et d'après lequel le nombre de fois que le premier rapport „contient” le second est exprimé par la valeur de n dans l'équation $\frac{53}{203} = \left(\frac{5}{11}\right)^n$. La réponse ne manquait donc pas de précision comme on serait tenté de le croire au premier abord; mais elle impliquait que, même en admettant la justesse de toutes les propositions qui avaient amené la première de ses quadratures prétendues, Grégoire n'avait pas donné la quadrature proprement dite du cercle mais seulement la réduction de cette quadrature à celle de l'hyperbole ou aux logarithmes.

Trois mois plus tard, en juillet 1652, Huygens avait à Gand un entretien amical avec Grégoire qui lui laissa entendre que son livre avait été rédigé par ses élèves, qu'il se pourrait bien qu'une erreur se fût glissée dans la première quadrature, la seule attaquée directement par Huygens; mais qu'il avait confiance dans les autres. En quittant Grégoire, Huygens était sous l'impression que la réponse tarderait encore longtemps à paraître et qu'elle ne vaudrait pas grand' chose⁹⁾.

Toutefois, déjà en janvier 1653 Huygens apprit¹⁰⁾ qu'une réfutation de son „Εξέτασις” était prête, composée par un des élèves de Grégoire, le père Aynscom. Elle ne parut qu'en 1656¹¹⁾. En attendant, Kinner à Löwenthorn, un

⁵⁾ Voir la p. 175 du T. I.

⁶⁾ Comparez la p. 327 du T. XI.

⁷⁾ Voir la p. 180 du T. I.

⁸⁾ L'ouvrage cité dans la note 7 de la p. 156 du T. I.

⁹⁾ Voir, sur cette entrevue, la lettre de Huygens à Tacquet du 4 novembre 1652, p. 189 du T. I.

¹⁰⁾ Voir sa lettre à van Schooten du 17 janvier 1653, p. 219 du T. I.

¹¹⁾ Sur la cause du retard on peut consulter une lettre de Grégoire à Huygens du 15 janvier 1654, p. 266 du T. I.

autre élève, prit la défense de son ancien maître. Dans ses lettres à Huygens du 30 novembre 1652 et du 18 juillet de l'année suivante ¹²⁾ il contesta que la première quadrature de Grégoire fût celle à laquelle l'auteur avait donné la préférence sur les autres, comme Huygens l'avait prétendu ¹³⁾. Tout au contraire il considérait qu'avec elle l'auteur avait plutôt voulu montrer la possibilité de la quadrature du cercle que de l'exposer de fait. C'était la seconde quadrature qui, d'après l'opinion de Grégoire lui-même, était la plus facile. Lui, Kinner, l'avait rédigée en 35 propositions qu'il publierait peut-être bientôt; ce qu'il fit en effet dans son ouvrage „*Elucidatio geometrica Problematis Auftriaci sive Quadratura Circuli felicitè tandem detectæ per R. P. Gregorium a S. Vincentio*” ¹⁴⁾.

Aussitôt après la réception de cette „*Elucidatio*” Huygens chercha à détromper Kinner en lui indiquant le lieu précis où il avait trouvé sa quadrature en défaut ¹⁵⁾; mais il ne réussit pas à le convaincre ¹⁶⁾.

¹²⁾ Voir les pp. 193 et 235 du T. I.

¹³⁾ Voir la première page de l'„*Essai*”, p. 315 du T. XI.

¹⁴⁾ Voir, pour le titre complet, la note 3 de la p. 252 du T. I.

¹⁵⁾ Voir la lettre N°. 184 du 23 mars 1654, p. 273 du T. I.

¹⁶⁾ Voir la lettre N°. 188 du 11 avril 1654, p. 282 du T. I. L'ouvrage de Kinner à Löwenthorn est très rare. Un exemplaire se trouve dans la bibliothèque de l'Université à Prague. Par la bienveillance de la direction nous l'avons pu avoir à Amsterdam et constater la portée de l'erreur commise par Kinner, à l'exemple de Grégoire.

Soient, en effet,

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \dots = a_n : b_n,$$

et de plus:

$$a_1 : c_1 = b_1 : d_1; a_2 : c_2 = b_2 : d_2; a_3 : c_3 = b_3 : d_3; \dots a_n : c_n = b_n : d_n;$$

on aura alors:

$$\Sigma a : \Sigma c = \Sigma b : \Sigma d.$$

Ce théorème est démontré par Archimède; il constitue la Prop. 2 de l'ouvrage „*De Conoidibus et Sphaeroidibus*”, p. 29 de l'édition de Commandin (Heiberg, T. I, p. 291, où elle porte le numéro 1^b). Grégoire et Kinner font remarquer qu'elle reste valable si les grandeurs a, b, c, d sont remplacées par des rapports; ce qui est vrai.

Des relations:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{r_1}{s_1} = \frac{p_2}{q_2} : \frac{r_2}{s_2} = \frac{p_3}{q_3} : \frac{r_3}{s_3} = \dots = \frac{p_n}{q_n} : \frac{r_n}{s_n}$$

combinées avec:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{t_1}{u_1} = \frac{r_1}{s_1} : \frac{v_1}{w_1}; \frac{p_2}{q_2} : \frac{t_2}{u_2} = \frac{r_2}{s_2} : \frac{v_2}{w_2}; \dots \frac{p_n}{q_n} : \frac{t_n}{u_n} = \frac{r_n}{s_n} : \frac{v_n}{w_n},$$

on peut donc conclure légitimement qu'on aura:

$$\Sigma \frac{p}{q} : \Sigma \frac{t}{u} = \Sigma \frac{r}{s} : \Sigma \frac{v}{w};$$

mais dans l'application qui suit, le *Hoc est* signalé par Huygens dans la lettre N°. 184 (p. 273 du T. I), cette relation est traitée comme si elle était:

Après ce premier passe d'armes avec un des élèves de Grégoire, Huygens avait encore à attendre plus de deux années avant qu'il reçut, en juillet 1656, la réponse du père Aynscom¹⁷⁾, annoncée depuis si longtemps. Dans cet ouvrage de 182 pages in folio, l'auteur s'efforce à réfuter tous les adversaires des quadratures de Grégoire. Il les divise en deux classes: ceux qui ont attaqué les théorèmes sur les proportionnalités et ceux qui, laissant de côté ces théorèmes ou admettant leur justesse, se sont occupés des propositions dont les quadratures dépendent plus directement. Après avoir rendu hommage dans sa préface aux adversaires, parmi lesquels il donne au jeune Huygens la première place, qui se font l'effort de méthodes dignes de géomètres, quoiqu'ils n'aient pas atteint leur but¹⁸⁾, il répond à ceux de la première classe par son „Liber primus”, qui occupe les 88 premières pages de son ouvrage. Puis le second livre débute, dans sa „Pars prima,” par un résumé de la première quadrature de Grégoire avec des explications authentiques suivant les intentions de son auteur¹⁹⁾; tandis que la „Pars secunda” prend à tâche de réfuter l'un après l'autre tous les adversaires de la „seconde classe” par autant de „Responsiones”²⁰⁾, desquelles nous reproduisons

$$\frac{\Sigma p}{\Sigma q} : \frac{\Sigma t}{\Sigma u} = \frac{\Sigma r}{\Sigma s} : \frac{\Sigma v}{\Sigma w}.$$

Si nous ajoutons que les Σp , Σq , etc. représentent des cubatures de divers corps, générés par l'opération „ducere planum in planum”, décrite p. 278 du T. XI, et que quelques-unes de ces cubatures dépendent de la quadrature du cercle, on comprendra comment cette application erronée de la proposition citée d'Archimède a pu mener à une fausse quadrature du cercle.

Ces remarques suffiront pour élucider les lettres citées, échangées entre Huygens et Kinner. Comme il l'avait déjà annoncé dans sa lettre du 25 mars 1654 (voir la page 279 du T. I), Huygens, tout en poursuivant sa correspondance amicale avec Kinner, n'a pas répliqué aux objections futiles contre sa critique, contenues dans la lettre de Kinner du 11 avril 1654, p. 283 du T. I.

¹⁷⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 6, p. 210 du T. I.

¹⁸⁾ „Qua in re, solidius reliquis, versati sunt, Clariss. Dominus Christianus Hugenus, Eruditissimique viri, Adrianus Auzotius, Alexius Syluius, & R. P. Vincentius Leotaudus S. I. Geometra egregius: qui licet spe sua falsi, & scopum quem spectabant vnicè, minime attigeret, vt sequentes edocebunt libri, ea certe in re geometrica versati sunt methodo, quae Geometras decet, vnde illorum conatus Auctori non solum non displicuit, vt multum se debere illis fateatur perlubenter: ego certè, totum huius operis argumentum, iisdem debere me, nunquam dissilebor: in quo, quid potissimum spectarim, quid à me factum sit, patetis accipe.”

¹⁹⁾ Voir les pages 89—104 de l'ouvrage cité.

²⁰⁾ Voir les pages 104—131 de l'ouvrage d'Aynscom. En effet, les adversaires de Grégoire se sont bornés presque exclusivement à attaquer sa première quadrature; soit que, comme Huygens, ils l'aient considérée comme préférée par l'auteur aux autres, soit qu'ils n'aient pas eu le courage de pénétrer plus avant.

plus loin ²¹⁾ la „Responsio III ad Ἐξέτασιν Clariss. D. Christiani Hugenij”. Enfin Aynfcom conclut par un troisième, quatrième et cinquième Livre qui contiennent des exposés des trois autres quadratures de Grégoire.

Inutile de dire que le père Aynfcom ne réussit pas à sauver ni la première quadrature, ni les autres; toutefois une chose ressort très nettement de son exposition. Nous voulons parler de l'emploi, par Grégoire, du terme „contenir” dans la „Demonstratio” de la 44^e proposition du „Lib. 10”, proposition dont dépend la première quadrature. Quel est le sens de ce terme dans la phrase „qu'un rapport donné en contient un autre un certain nombre de fois”? Huygens, dans son „Ἐξέτασις” ²²⁾, examine successivement deux interprétations diverses. Il en rejette la première, celle que nous venons d'exposer plus haut, en remarquant que le rapport 53 à 203 n'est du rapport 5 à 11 ni le carré, ni la troisième puissance ou quelque puissance plus élevée”, ensuite il en hasarde avec beaucoup de réserve une autre qui amène la réduction à l'absurde qu'il fait suivre. Or, il n'y a aucun doute que cette première interprétation était celle, visée par Grégoire ²³⁾. La circonstance alléguée par Huygens que le nombre n qui doit satisfaire à la relation

$$\frac{53}{203} = \left(\frac{5}{11}\right)^n$$
 est nécessairement un nombre incommensurable n'y fait pas obstacle, puisque la „Prop. 129” ²⁴⁾ du „Lib. 6” de l'ouvrage de Grégoire, citée par

²¹⁾ Voir les p. 249—261 du Tome présent.

²²⁾ Voir la p. 327 du T. XI.

²³⁾ Cela résulte entre autres de la „Prop. 34” du „Lib. 10” (p. 1117—1118) où la phrase en question est employée dans le sens bien déterminé que nous avons expliqué p. 279—280 du T. XI, au § 9.

²⁴⁾ Voici cette proposition qu'on trouve à la page 596 de l'ouvrage de Grégoire: „Sint AB, BC asymptoti hyperbolae DFH, & DE, FG, HC parallelae asymptoto: plano autem DEGF incommensurable sit planum FGCH.

Dico rationem DE ad FG, toties multiplicare rationem FG, ad HC, quoties quantitas DEGF, continet quantitatem FGCH.”

Or, écrivant $xy = k^2$ pour l'équation de l'hyperbole et posant $DE = a$, $FG = b$, $HC = c$, $DEGF = A$, $FGCH = B$, on a: $A = k^2 \log \frac{a}{b}$; $B = k^2 \log \frac{b}{c}$, donc

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{b}{c}\right)^n \text{ où } n = A : B \text{ est en général un nombre incommensurable.}$$

Il est vrai que le terme „contenir” est employé ici et partout dans le sixième livre dans un autre sens que dans le dixième livre où se trouve la 44^e proposition que nous venons de mentionner; mais on doit s'attendre dans l'ouvrage de Grégoire à ces sortes de surprises.

Aynfcom²⁵⁾, équivait pleinement à l'introduction des exposants incommensurables. Toutefois elle change entièrement la portée de la prétendue quadrature, qui, comme nous l'avons déjà remarqué, ne donnerait autre chose que la réduction de la quadrature du cercle à la détermination d'un nombre qui n'est exprimable qu'à l'aide des logarithmes²⁶⁾. Sous ce point de vue Huygens a raison de rejeter cette première interprétation comme ne menant pas à une quadrature proprement dite.

Dès que Huygens eut reçu l'ouvrage d'Aynfcom il prépara sa réplique. Il l'annonça à De Roberval²⁷⁾ et à Wallis²⁸⁾ duquel il se propose de citer dans cette réplique l'opinion, conforme à la sienne, exprimée par Wallis dans la préface de son „Arithmetica Infinitorum”. Le 25 septembre il envoie le manuscrit à l'imprimeur Elsevier²⁹⁾. Au commencement d'octobre 1656 l'impression est achevée³⁰⁾.

Aynfcom, qui reçut un exemplaire par l'intermédiaire du père Seghers³¹⁾, n'a jamais répondu, nonobstant un rappel que Huygens lui fit parvenir en 1659 par le même père³²⁾.

Et il n'y a pas de doute que le terme „toties multiplicare” du livre 6 équivait au „toties continere per multiplicationem”, ou simplement „toties continere”, du livre 10.

Ajoutons que de Sarasa, dans l'ouvrage mentionné plus haut, comme aussi Tacquet dans sa lettre à Huygens du 2 décembre 1652, p. 194–197 du T. I, ont compris de cette manière l'intention de Grégoire. Tous les deux, Sarasa à la p. 7 de son ouvrage, citent à ce propos cette même „Prop. 129”. Et Wallis doit avoir exprimé la même opinion dans une lettre dont nous ne connaissons que la réponse de Huygens qui est du 13 juin 1653 (voir la p. 332 du T. I).

Consultez d'ailleurs sur les difficultés de l'interprétation des propositions de Grégoire la note 28, p. 257 du Tome présent.

²⁵⁾ En bas de la p. 100 de son ouvrage,

²⁶⁾ On aurait $\frac{53}{203} = \left(\frac{5}{11}\right)^n$ et $\frac{5}{11} = \left(\frac{4\pi + 31}{2\pi + 31} \frac{3}{3}\right)^n$; donc $\log \frac{4\pi + 31}{2\pi + 31} \frac{3}{3} = \left(\log \frac{5}{11}\right)^2 : \log$

$\frac{53}{203}$. Nous laissons de côté l'explication par trop forcée donnée par Aynfcom des intentions de Grégoire dans le „Scolium” de la „Prop. 40”, sur lequel on pourra consulter la note 20, p. 254 du Tome présent. D'ailleurs cette explication ne mène à aucune construction ou calcul saisissable, et Huygens n'y a fait que justice dans les dernières pages de sa Lettre à Aynfcom, p. 276–277 du Tome présent.

²⁷⁾ Voir la Lettre N^o. 315, du 20 juillet 1656, p. 457 du T. I.

²⁸⁾ Voir la Lettre N^o. 316, du 21 juillet 1656, à la p. 459 du T. I.

²⁹⁾ Toutefois l'ouvrage fut publié chez Vlacq; comparez les p. 490 et 491 du T. I.

³⁰⁾ Voir les lettres d'envoi à Seghers, van Schooten et van Gutschoven, pp. 502, 503 et 511 du T. I.

³¹⁾ Voir la p. 502 du T. I.

³²⁾ Voir la p. 484 du T. II.

Ainsi la poussière soulevée par la quadrature du cercle de Grégoire St. Vincent, les attaques de Merfenne ³³⁾, Sylvius ³⁴⁾, Maybaum ³⁵⁾, Lécotaud ³⁶⁾, Auzout ³⁷⁾ et Huygens et les réponses de de Sarafa, Kinner à L.öwenthorn et Aynscorn, retombait enfin au repos, et toute cette polémique, qui a occupé le monde savant pendant plus de dix années, aurait laissé bien peu de traces, ne fût-ce que tout ce qui regarde un homme comme Huygens ne cessera jamais d'inspirer un certain intérêt.

³³⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 5, p. 132 du T. I.

³⁴⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 1, p. 278 du T. I.

³⁵⁾ Voir l'ouvrage cité dans la note 5, p. 409 du T. I.

³⁶⁾ Voir les ouvrages cités dans la note 1, p. 266 et 267 du T. I.

³⁷⁾ Sous le pseudonyme A. A. dans l'ouvrage cité dans la note 4 p. 458 du T. I.

TROISIÈME RÉPONSE ¹⁾.

A L'ΕΞΕΤΑΣΙΣ DU TRÈS-SAVANT SEIGNEUR CHRÉTIEN
HUYGENS ¹⁾.

1. Après avoir expliqué ce qui semblait appartenir à la première Quadrature ²⁾ je n'ai pas voulu, très-savant Seigneur, que cette mienne étude manquât à Vous, ou fût exigée par d'autres, auxquels le silence de l'auteur pût sembler une confession tacite d'erreur; et quoique, après ce qui a été dit par moi dans les pages précédentes, la réfutation de ce que vous écrivez longuement dans tout votre examen de la Cyclométrie soit facile, j'ai à dessein voulu la différer jusqu'ici afin de soumettre aux yeux de mes lecteurs, sans interruption, toute votre Εξέτασις et en même temps ma réponse.

2. En premier lieu donc vous dites pag. 25 ³⁾: *Il (Grégoire de Saint Vincent) proposa quatre modes pour carrer le Cercle, et même en appliqua aussi à la quadrature de l'Hyperbole un, au sujet duquel, par plusieurs indices, on peut conclure qu'il fut estimé par lui-même meilleur que les autres. Un de ces indices est justement qu'il démontra par ce même mode deux quadratures de figures différentes, un autre que ce mode est beaucoup plus évident que les trois autres et par cela même devrait paraître beaucoup moins sujet à erreur; puis encore jusqu'à certain point en ce qu'il le produisit en premier lieu; enfin le plus fort indice consiste en ceci que, dans ce qu'il dit dans la préface au lecteur laquelle précède l'ouvrage entier, là où il expose brièvement l'histoire et le progrès de son invention, il ne mentionne aucun mode en dehors de ce seul. Il est vrai qu'il a pu avoir une autre raison de passer sous silence les trois quadratures suivantes, nommément qu'il savait que des mêmes principes toutes les quatre étaient déduites et démontrées.*

Vous vous trompez, très-savant Seigneur, et vos conjectures s'écartent aussi loin que possible de la vérité; la seule et unique raison de mettre en avant celle que l'Auteur appliqua en même temps au cercle et à l'hyperbole fut la proposition 50 ⁴⁾

¹⁾ La pièce est empruntée aux p. 120—124 de l'ouvrage d'Aynseom, cité dans la note 6, p. 210 du T. I. Pour faciliter les renvois, que nous aurons à faire, nous l'avons divisée en paragraphes.

RESPONSIO III^o.

ΑΔ' ΕΒΕΤΑΣΙΝ CLARISS. D. CHRISTIANI HUGENIJ.

1. Explanatis iis, quae ad primam quadraturam pertinere videbantur ²⁾, nolui studium hoc meum, aut deesse Tibi Clariss. Domine, aut ab aliis requiri, quibus Auctoris silentium, tacita videri posset erroris confessio: & quamvis ex iis, quae in praecedentibus à me dicta sunt, facilis sit eorum refutatio, quae toto cyclo-metriae examine perferibis, studio tamen in hunc locum differre placuit, ut totam simul ἑξέτασιν tuam, una cum responso, non interruptim oculis obicerem.

2. Primum igitur pag. 25 ³⁾, *quatuor*, inquis, *modos proposuit (Auctor) quadrandi circulum; unum vero eorum, etiam quadraturae hyperbolae applicavit: quem caeteris potiore ab ipso existimari, ex multis indiciis colligere licet; unum est hoc ipsum, quod duas diversarum figurarum quadraturas, per eundem hunc demonstrarit: alterum, quod evidentior hic sit modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit: & denique hoc maximum est, quod in iis quae ad lectorem in principio totius operis praefatur, ubi suae inventionis historiam & progressum paucis exposuit, nullius modi praeter hunc unum meminerit; potuit & aliam rationem habuisse tres posteriores quadraturas illic silentio praetercundi; eam videlicet, quod quatuor, omnes sciret ex iisdem principiis deductas, & demonstratas esse.*

Falleris Clarissime Domine, & coniecturae illae tuae, quam longissimè à vero distant; sola & unica ratio praeponendi illam, quam circulo simul & hyperbolae applicuit Auctor fuit propositio 50 ⁴⁾. quae, cum cylindrum ad aliud corpus non

²⁾ Il s'agit du résumé de la première quadrature de Grégoire, lequel occupe la „Pars prima” du „Lib. II”, p. 39—104 de l'ouvrage d'Aynseom. Comparez la p. 244 de l'„Avertissement” qui précède ici.

³⁾ Voir la p. 315 du T. XI.

⁴⁾ Dans cette proposition et la suivante Grégoire démontre que le volume du cylindre droit ayant pour base la figure CDHI de la p. 278 du Tome XI et pour hauteur AB est égal au volume du solide qu'on obtient en soumettant à l'opération „ducere planum in planum” les aires GNHI, OPHI. Consultez, quant à la portée de ce théorème sur la première quadrature de Grégoire, les § 1—3 de l'„Aperçu” de cette quadrature, p. 277 du T. XI.

laquelle puisqu'elle réduit d'une manière admirable le cylindre à un corps non cylindrique et ainsi est fondamentale à toutes les quadratures et ne pouvait être inférée parmi les autres sans troubler l'ordre, obligea de donner la première place à cette quadrature. De plus, c'est une très grave erreur que toutes les quadratures ont été déduites et démontrées par les mêmes principes, car en dehors de la réduction du cylindre circulaire au solide produit par deux paraboles, placées à la renverse l'une par rapport à l'autre ⁵⁾, la première quadrature n'a rien de commun avec les autres. Le raisonnement dans les deux cas et la comparaison des solides et des rapports diffèrent du tout au tout; dans la première quadrature on ne fait aucun usage des proportionnalités; les autres ne peuvent être effectuées sans leur moyen; dans la première l'argumentation est conduite d'une manière nouvelle par la multiplication égale des rapports partiels ⁶⁾, dans les autres aucune mention n'est faite de multiplication.

3. Vous continuez ensuite: ⁷⁾ *Mais il m'a semblé que l'une ou l'autre de ces considérations suffisait pour persuader, qu'il y aurait une seule discussion valable pour toutes laquelle, détruisant la première quadrature, entraînerait les autres à sa suite. Car si nous avons montré qu'il y a erreur dans celle qui est la moins obscure, je ne vois pas pour quelle raison un meilleur succès se laisserait espérer pour les trois suivantes, qui se trouvent enveloppées des plus grandes ténèbres et que l'Auteur lui-même semble mettre au-dessous de cette seule première.*

Une double erreur est contenue dans ce peu de lignes; la première consiste en ce que vous estimez qu'une seule discussion suffit à toutes: or, comment une seule discussion pourrait-elle suffire à toutes, lorsque les trois dernières n'ont rien de commun avec la première? A supposer que votre *εξέτασις*, ce qu'elle a fait moins que toute autre chose, ait renversé la première, certainement elle ne se rapporte pas plus aux autres qu'à la dimension Archimédienne; si vous voulez l'essayer, vous corrigerez sur-le-champ votre jugement. L'autre erreur réside en ceci que vous croyez que la première quadrature a moins d'obscurité tandis que les suivantes sont couvertes des plus denses brouillards. Mais l'Auteur en juge tout autrement, moi, en les développant chacune pour soi, j'ai éprouvé toute autre chose. La première a certainement plus de complications et d'obscurité que les trois autres ensemble; dans ces dernières le raisonnement est très-clair et la réduction des solides facile, dans la première la nouvelle manière de comparer au moyen des rapports partiels également multipliés est compliquée, et la réduction des solides multiple, variée et très-difficile.

4. Pag. 26 ⁸⁾. *Cependant je ne puis laisser de dire au moins ceci, que le très-savant auteur n'a pas appliqué avec assez de bonheur quelques inventions en matière de proportionnalités aux quadratures et que, dans mon opinion, c'est là la cause de son erreur. C'est ce que j'avais observé tout premièrement dans la proposition 39 du livre 10 etc.*

Ici, de nouveau, se présente une grave erreur: car ni dans 39, ni dans toute la

cylindricum, admirabili reducat modo, adeoque quadraturis omnibus esset fundamentalis, neque sine ordinis perturbatione, aliis inferi posset, primum huic quadraturae locum dedit. Porro quadraturas omnes ex iisdem principiis deductas, & demonstratas esse, error est longè gravissimus: nam praeter reductionem cylindricam, ad solidum ex ductu subalterno parabolarum ortum ⁵⁾, nil prima cum caeteris commune habet: ratiocinatio in utrisque, & solidorum, rationumque comparatio, toto differunt caelo. in hac, nullus proportionalitatum usus; illae, absque earum ope perfici non possunt: in hac, per rationes partiales acquemultiplicatas ⁶⁾, nouo modo instituitur argumentatio, in illis, nulla multiplicationis mentio.

3. Pergis deinde ⁷⁾: *sed mihi vel alterutra harum considerationum sufficere visa est, ut persuaderet, unum pro omnibus fore discussionem, quae quadraturam primariam infirmatura esset, reliquarum agmen ducentem: si enim erratum in ea ostenderimus, quae minus obscuritatis habet, non video quid ratione melior successus expectandus sit in tribus sequentibus, quae maximè caligine imoluantur, quasque auctor ipse vel uni illi possidere videtur.*

Duplex hic in tam paucis lineis error interuenit; prior in hoc consistit, quod vnam omnibus sufficere discussionem existimes: qui enim discussio vna, sufficere possit omnibus, cum tribus reliquis nil cum prima sit commune? esto (quo nihil minus factum) primam euerterit *ἐξέτασις* tua, ad reliquas certè non magis illa, quam ad Archimedeam pertinet dimensionem. experire si placet, & ilico iudicium ipse tuum corriges. alter in eo est, quod primam minus habere obscuritatis, sequentes autem maximè inuolui putes caligine. at longè aliud de illis censet Auctor, aliud ego dum singulas explano, expertus sum. prima certè plus & tricarum & obscuritatis habet, quam reliquae simul omnes. in his & clarissima est ratiocinatio & reductio solidorum facilis; in illa nouus per rationes partiales acquemultiplicatas comparandi modus, intricatus est, & solidorum reductio multiplex, varia, ac perdifficilis.

4. Pag. 26 ⁸⁾. *unum tamen praetermittere nequeo quin dicam, Clariss. virum non satis feliciter quaedam inuenta in materia proportionalitatum ad quadraturam applicasse; atque hinc meà opinione ipsi existisse erroris causam, primum omnium id in propof. 39 lib. 10. obseruaueram &c.*

Gravis hic rursus occurrit error: neque enim in 39, neque in tota prima qua-

⁵⁾ C'est-à-dire en appliquant l'opération „ducere planum in planum”, décrite au § 4, p. 278 du T. XI, à deux paraboles situées comme les paraboles ANZ et BPV de la figure de cette page 278.

⁶⁾ Voir les §§ 7 et 9 à la p. 279 du T. XI en tenant compte de l'équivalence des termes „toties continere” et „toties multiplicare”, sur laquelle on peut consulter la note 24, p. 246 du Tome présent.

⁷⁾ Voir les p. 315 – 317 du T. XI.

⁸⁾ Voir la p. 317 du T. XI.

première quadrature il n'est fait usage d'aucune proportionnalité, puisque c'est toute autre chose de comparer des rapports entre eux selon l'égalité multiplication de leurs rapports, par lesquels ils sont constitués selon la huitième proposition du livre 10⁹⁾, que d'argumenter par proportionnalités: lisez la proposition 39, expliquée selon l'intention de l'Auteur¹⁰⁾ et comparez la avec la proposition 3 du livre suivant¹¹⁾ dont la démonstration est conduite par proportionnalités, et aussitôt apparaîtra une différence énorme: et, en effet, comment l'Auteur a-t-il pu appliquer moins heureusement à la Quadrature quelques inventions en matière de proportionnalités lors que ni dans la propof. 12¹²⁾ ou 39¹³⁾, ni dans 40 ou 44, ni dans 51 ou 52 ou 53, dans lesquelles toute la première quadrature est contenue, il ne cite ou n'emploie aucune proposition empruntée au livre des proportionnalités¹⁴⁾. Donc ce n'est pas de là qu'une cause d'erreur a pu exister pour l'auteur.

5. Pag. 27¹⁵⁾. *je ramènerai la question à ceci que, à moins qu'il ne déclare impossible de conduire sa quadrature à bonne fin et de trouver par elle réellement une figure rectiligne égale au cercle, je lui montrerai de quelle manière cela pourrait ensuite être obtenu très facilement. Après cela en suivant ses propres pas je démontrerai, que, par la voie dans laquelle il nous a précédé jusqu'ici, on ne peut parvenir nullement à ce qu'il désire.*

Sur la manière que vous promettez de donner par laquelle l'auteur pourrait dans la suite trouver très facilement une figure rectiligne égale au cercle nous verrons tantôt lorsque nous serons arrivés jusque-là. Qu'en suivant ses pas on peut arriver au but proposé sera démontré dans ce livre-ci et dans les suivants¹⁶⁾.

Ce qui suit jusqu'à la page 32¹⁷⁾ ne contient rien d'autre que quelques propositions de l'Auteur.

6. Pag. 32¹⁷⁾. *Cela posé, il faut savoir que pour le savant auteur tout espoir et toute base de la quadrature à effectuer sont fondées en ceci qu'il estime facile de trouver le rapport du solide III¹⁸⁾ au solide XV (lequel rapport j'ai déjà dit être la seule*

⁹⁾ Comparez la note 8, p. 317 du T. XI où la même „Prop. 8” est citée. D'ailleurs nous la reproduirons plus loin dans la note 28, p. 257.

¹⁰⁾ Consultez, sur cette proposition 39, le § 10 de la p. 280 du T. XI et la note 8, p. 317 du même Tome. Ici il s'agit de l'explication que Aynscom a donnée de cette proposition à la p. 97 du „Lib. II” de son ouvrage. D'après cette explication, pour autant qu'on peut la comprendre, Grégoire n'aurait voulu affirmer le „toties continere” que pour les rapports „constituants”. Inutile de dire qu'alors elle perdrait tout l'intérêt que Grégoire y attache dans sa quadrature du cercle.

¹¹⁾ C'est-à-dire la „Prop. 3” du „Lib. III”, p. 136 de l'ouvrage d'Aynscom (celui de Grégoire ne contient pas plus de dix livres), dans laquelle en effet, la conception du „toties continere” ne joue aucun rôle.

¹²⁾ Voici cette „Prop. 12”, p. 1105 de l'ouvrage de Grégoire: „Sint quatuor ordines quinque proportionalium A, B, C, D, E, & F, G, H, I, K: deinde L, M, N, O, P, & Q, R, S, T,

dratura, vllus proportionalitatum vsus, quippe longè aliud est, rationes inter se comparare, secundum aequemultiplicationem illarum rationum, ex quibus iuxta octauam eiusdem lib. 10. constituuntur⁹⁾, aliud per proportionalitates argumentari: lege propof. 39. iuxta Auctoris mentem explicatam¹⁰⁾, illamque confer cum propof. 3. sequentis libri¹¹⁾, cuius demonstratio per proportionalitates instituitur; & ilico discrimen ingens apparebit: & vero qui Auctör potuit inuenta quaedam in materia proportionalitatum infelicius ad quadraturam applicasse, cum nec in propof. 12¹²⁾. aut 39¹³⁾. nec in 40 aut 44. nec in 51. aut. 52. aut 53. quibus tota prima continetur quadratura, vllam citet aut vllà vtatur propositione ex libro de proportionalitatibus¹⁴⁾ petita? non igitur inde extitisse Auctori potuit erroris causa.

5. Pag. 27¹⁵⁾. *eo rem deducam, vt si quidem non impossibile dicit quadraturam suam ad exitum perducere, & per eam reapse inuenire rectilinum circulo aequale, ostendendum qui id facillimè impofterum assequatur: deinde vestigia ipsius infistens demonstrabo, quibus hactenus nobis praecessit, iis nequaquam ad optatum finem perueniri posse.*

De modo quem daturum te polliceris quo facillimè impofterum Auctör rectilinum circulo inuenire possit aequale, mox videbo, vbi ad illum deuenero. porro vestigia illius infistendo ad optatum finem deueniri posse hic, & sequentes edoccebunt libri¹⁶⁾.

Quae sequuntur vsque ad pag. 32.¹⁷⁾ nil aliud continent, praeter aliquot Auctoris propositiones.

6. Pag. 32¹⁷⁾. *his sic constitutis, sciendum est omnem spem & fundamentum perficiendae quadraturae, Clariss. viro in eo positum esse, quod existimet rationem solidi HI^2 ¹⁸⁾ ad solidum XV (quam vnicam tantum desiderari iam monui) facili*

V, habentium vltimas quantitates E, K, P, V aequales inter se. Dico rationem quantitatum AF ad LQ, toties continere rationem quantitatum CH ad NS, quoties ratio quantitatum CH ad NS, continet rationem quantitatum DI ad OT."

Remarquons que d'après les propositions qui précèdent, dont nous en citerons deux dans la note 28, p. 257, les notations AF, LQ, etc. désignent $A + F$, $L + Q$, etc. Le théorème est donc faux, si du moins on attache aux mots leur signification ordinaire. Consultez là-dessus la note 28 citée.

¹³⁾ Cette proposition et les cinq autres qui suivent ont toutes été mentionnées aux p. 277—280 du T. XI.

¹⁴⁾ Il s'agit du „Liber octavus, De Proportionalitatibus Geometricis", qui occupe lesp. 865—954 de l'ouvrage de Grégoire.

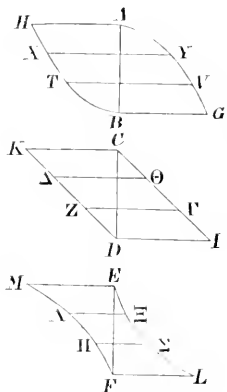
¹⁵⁾ Voir la p. 319 du T. XI.

¹⁶⁾ Il s'agit des „Lib. III, IV et V" de l'ouvrage d'Aynseom qui traitent les trois autres quadratures de Grégoire.

¹⁷⁾ Voir la p. 325 du T. XI.

¹⁸⁾ Voir la figure de la pag. 254.

chose qui reste à désirer) dès que l'on connaît les deux rapports suivants, savoir celui du solide $MΞ$ au solide $ΔΣ$, et celui du solide $KΘ$ au solide $ΔΓ$. Car alors on pourra argumenter comme il suit. Commu est le rapport du solide $MΞ$ au solide $ΔΣ$, de même celui du solide $KΘ$ au solide $ΔΓ$; donc est connu aussi combien de fois le premier rapport contient le dernier, or, autant de fois que celui-là contient celui-ci, autant de fois ce dernier, c'est-à-dire le rapport du solide $KΘ$ au solide $ΔΓ$ contient le rapport du solide HY à XV , donc aussi ce dernier rapport sera connu.



Ici vous vous écarterez tout à fait du sens de l'auteur; car quoique le fondement de la quadrature à effectuer fût tiré en ceci que l'on fût connaître le rapport du solide HY au solide XV , jamais l'auteur n'a estimé qu'il fût facile à trouver lorsque font connus les rapports du solide $MΞ$ au solide $ΔΣ$ et du solide $KΘ$ au solide $ΔΓ$; car il les avait déjà fait connaître auparavant par la propof. 43¹⁹⁾; d'où il suit qu'il ne s'est pas aussi servi de l'argumentation que vous dites, mais de celle que j'ai produite dans le Scholium à la proposition 40²⁰⁾ laquelle du tout au tout diffère de la vôtre; de plus, vouloir admettre comme généralement connu un troisième rapport lorsque de deux rapports connus le premier contient par multiplication le second autant de fois que celui-ci contient par multiplication le troisième est la même chose que de vouloir produire entre deux données un nombre quelconque de moyennes proportionnelles²¹⁾; or, il serait insensé de confondre la quadrature avec le méfollabe ou de supposer celui-ci pour accomplir celle-là; l'auteur n'a donc pas espéré rendre connu un troisième rapport au moyen de deux rapports connus dont le premier contient autant de fois le second, que ce second le troisième²²⁾.

7. Ibid. ²³⁾ Si donc je lui aurai indiqué quel est le rapport du solide $MΞ$ au solide $ΔΣ$, et aussi quel est le rapport du solide $KΘ$ au solide $ΔΓ$, et que même alors il ne puisse dire quel est le rapport du solide HY au solide XV , il devra avouer qu'il a tenté en vain la quadrature tant du Cercle que de l'Hyperbole.

¹⁹⁾ Comparez le § 8, p. 279 du T. XI.

²⁰⁾ Voir, sur la „Prop. 40” du „Lib. 10”, le § 10, p. 280 du T. XI. Aux p. 98—103 de son ouvrage Aynscom fait suivre cette proposition par une explication „iuxta auctoris mentem” et par un „Scholium” prolix et diffus. Il y prétend que l'assertion de Grégoire : que le rapport des solides $MΞ$ et $ΔΣ$ (voir la figure de la page présente) doit contenir autant de fois le rapport des solides $KΘ$ et $ΔΓ$ que celui-ci contient le rapport des solides HY et XV , ne s'applique pas aux rapports „totaux” des solides entiers, mais seulement aux rapports „partiels”, qui constituent ces rapports totaux, c'est-à-dire, aux rapports des tranches infiniment petites, pour lesquels, en effet, l'assertion est vraie. Ensuite pour représenter ces rapports

inueniri posse, si cognitae sint duae rationes nimirum ratio solidi MΞ ad fol. ΔΣ & ratio fol. KΘ ad fol. ΔΓ. sic enim tunc argumentabitur: nota est ratio solidi MΞ ad fol. ΔΣ, item ratio solidi KΘ ad fol. ΔΓ, ergo notum quoque, quoties illa ratio hanc continet; quoties autem illa hanc continet, toties haec ipsa continet rationem solidi HY aa fol. XV, ergo & haec nota erit.

Plane hic ab Auctoris mente deuias; licet enim fundamentum perficiendae quadraturae in ea positum sit, vt nota reddatur ratio solidi HY ad fol. XV, nunquam tamen existimauit Auctor illam facile inueniri posse, si cognitae forent duae rationes, nimirum solidi MΞ ad fol. ΔΣ & fol. KΘ ad fol. ΔΓ; has enim antea notas fecerat propof. 43¹⁹⁾. vnde nec illam quam profers argumentationem instituet, sed eam, quam in scholio ad propos. 40. attuli²⁰⁾, quae toto caelo à tua differt: porro ex datis vel notis duabus rationibus, quarum prima toties per multiplicationem continet secundam, quoties haec per multiplicationem continet tertiam, velle tertiam vniuersaliter notam facere, idem est atque inter duas datas, quocumque medias proportionales velle exhibere²¹⁾: stultum autem foret quadraturam meselabio commiscere, aut hoc ad illam perficiendam supponere. non igitur ex duabus notis rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties haec multiplicat tertiam, sperauit Auctor hanc notam reddere²²⁾.

7. Ibid. ²³⁾ *si igitur indicauero ipsi, quae sit ratio solidi MΞ ad fol. ΔΣ, item quae sit solidi KΘ ad fol. ΔΓ, & ne tum quidem dicere possit, quam rationem habeat solidum HY ad fol. XV, fateatur sanè se frustra vtramque quadraturam tentasse, tum circuli tum hyperboles.*

partiels il a recours aux aires hyperboliques que nous auons mentionnées dans la note 24. p. 245 du Tome présent; mais il finit par commettre la faute même contre laquelle il avertit le lecteur au début, en appliquant à des sommes ce qu'il n'a démontré que pour leurs parties. De plus, il fait la supposition erronée que le rapport des aires hyperboliques DEGF et GFHC (voir la figure de la note 24 que nous venons de citer) sera rationnel quand il en est ainsi des rapports des longueurs DE, EG et HC. Et, nonobstant tout cela, il n'arrive à aucune conclusion bien définie, qui permettrait de déduire le troisième rapport des deux autres par la construction ou par le calcul.

²¹⁾ Soient $a : b :: c : d :: e : f$ les trois rapports en question. Si alors on a $a : b = (c : d)^n$ et en même temps $c : d = (e : f)^n$, où n est un nombre commensurable, la détermination du rapport $e : f$ se réduit, en effet, au mesolabe, c'est-à-dire, à la construction d'un certain nombre de proportionnelles entre deux segments donnés, pourvu du moins qu'il soit possible de trouver le nombre n au moyen de la première relation, où les rapports $a : b$ et $c : d$ sont supposés connus.

$\mu \leftarrow \lambda \rightarrow \lambda$

Pour le montrer posons $e : f = g : d = (c : d)^{\lambda : \mu}$. On a alors $g = d^{\frac{\lambda}{\mu}} c^{\frac{\mu}{\lambda}}$; donc le segment g est la $\lambda^{\text{ième}}$ des $\mu - 1$ proportionnelles à interpoler entre d et c .

²²⁾ Ici la confusion, créée non sans intention, à ce qu'il nous semble, est à son comble. En vérité, si l'on nie que Grégoire ait voulu indiquer comment on pouvait déterminer le troisième rapport à l'aide des deux autres, alors sa première quadrature s'évanouit entièrement; puisqu'il ne donne aucun autre moyen pour parvenir à ce troisième rapport dont sa quadrature du cercle dépend.

²³⁾ Voir le quatrième alinéa de la p. 325 du T. XI.

Vous auriez pu, croyez moi, vous épargner ce labeur, car le rapport du solide $M\Xi$ au solide $\Delta\Sigma$ et de même du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$ lui était connu et il l'avait démontré tant à Rome qu'en Belgique à d'autres, plusieurs années avant que vous n'aviez vu le jour: lisez la propof. 43, livre 10, qui fait connaître les deux rapports; vous n'aviez donc nullement besoin de les indiquer à un Auteur, duquel même vous les aviez pris.

Si ²⁴⁾, *au contraire, lorsque ces deux rapports sont donnés, il aurait pu trouver ensuite celui du solide HY au solide XV , alors il peut croire avoir réellement carré le Cercle.*

C'est ici cette manière de réduire très facilement le cercle à un carré, que vous avez promise à la page 27 ¹⁵⁾ de donner à l'Auteur. Je vous prie, très-savant Seigneur, d'où avez vous pris que la quadrature est effectuée lorsque le rapport du solide HY au solide XV est connu? Certainement d'aucun autre que de l'Auteur et même si vous le vouliez, vous ne pourriez le nier: mais comment alors l'enseigniez vous, comme s'il l'ignorait, à celui même duquel vous l'avez appris? Je voudrais qu'en écrivant de telles choses vous vous fussiez rappelé ce que et à qui vous écriviez.

Je dirai ²⁵⁾ *maintenant quels sont ces rapports. Quant au premier, sçavoir celui du solide $M\Xi$ au solide $\Delta\Sigma$, je dis qu'il est le même que celui des nombres 53 à 203, tandis que l'autre, le rapport du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$ est celui de 5 à 11 et de ces deux rapports je donnerai plus loin la démonstration &c. Par conséquent, il lui incombera maintenant de définir combien de fois le premier rapport contient le second, c'est-à-dire combien de fois le rapport de 53 à 203 contient le rapport 5 à 11. Mais d'abord comment va-t-il expliquer ici le terme contenir? &c.*

Je n'ai aucune objection à ce que le rapport du solide $M\Xi$ au solide $\Delta\Sigma$ est le même que celui des nombres 53 à 203 et l'autre du solide $K\Theta$ au solide $\Delta\Gamma$ celui de 5 à 11, pourvu que l'un et l'autre soient bien démontrés: mais combien de fois le premier rapport contient par multiplication le second se trouve défini dans le scholium de la proposition 40 d'après les seuls principes de l'Auteur: mais dans quel sens le mot *continere* doit être expliqué c'est ce qu'on peut voir dans le scholium et les propositions 39.40 précédemment expliquées, d'où il suit que c'est contre la vérité, ce qui est prétendu à la page 37 ²⁶⁾, que dans l'opus Geometricum il n'est pas donné aucune autre explication du mot *continere* en dehors des deux produites par vous; et je m'étonne en vérité que cette interprétation n'a pas été aperçue par vous, parce qu'elle pouvait facilement être comprise de la proposition 12 ²⁷⁾; laquelle repose sur la huitième, surtout en y ajoutant l'explication du Père Sarafa au corollaire 9 ²⁸⁾ des confirmations de la quadrature, livre qui n'a pas

²⁴⁾ Voir le cinquième alinéa de la p. 325 du T. XI.

²⁵⁾ Voir les p. 325 et 327 du T. XI, à commencer par l'avant-dernier alinéa de la p. 325.

²⁶⁾ Voir le deuxième alinéa de la p. 329 du T. XI.

Superfedere, mihi crede, labori isti poterat; rationem enim solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$, item solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, notam habuit, aliisque & Romae & in Belgio demonstravit Auctor, pluribus annis antea, quam tu vita & luce fruereris: lege propof. 43. lib. 10. quae utramque rationem notam facit; nil igitur opus erat illam Auctori indicare, ex quo solo noticiam illius hausisti.

Sin ²⁴⁾ *vero datis istis duabus rationibus, inuenire post hac potuerit rationem solidi HY ad fol. XP , tum se credat circulum reuera quadrassè.*

Hic ille modus est circulum facillimè ad quadrum reducendi, quem pag. 27. ¹⁵⁾ daturum te auctori pollicitus es: Quaesito te Clariss. Domine, vnde habes, notâ ratione solidi HY ad fol. XV , quadraturam absolui? non aliundè certè quam ex Auctore, neque id, si velis, dissiteri potes: vt quid igitur, acti hunc ignoraret is à quo solo didicisti, quadraturae modum preferibis? cum illa scriberes, opastsem meminisse te, quid, & cui scriberes.

Dicam ²⁵⁾ *autem nunc ipsas rationes: & primam quidem, hoc est rationem solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$, aio esse eandem quae numeri 53 ad 203, alteram vero rationem solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, eam quae 5 ad 11. atque horum vtrumque infra sum demonstratus &c. consequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, quoties ratio harum prima, contineat secundam, hoc est quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. sed enim quo sensu verbum continere hic explicaturus est? &c.*

Rationem solidi $M\Xi$ ad fol. $\Lambda\Sigma$ eandem esse quae numeri 53. ad 203. & alteram solidi $K\Theta$ ad fol. $\Delta\Gamma$, eam quae 5. ad 11. nil habeo quod opponam, cum vtrumque rectè demonstratum sit: quoties autem ratio prima per multiplicationem contineat secundam, definitum est in scol. ad propof. 40. ex solis Auctoris principiis: quo autem sensu verbum *continere* explicaturus sit, vide idem scholium & propof. 39. 40. ante explicatas. vnde à vero alienum est, quod pag. 37. afferitur ²⁶⁾, aliam interpretationem verbi *continere*, praeter duas à Te allatas, nullam in oper. Geom. exhiberi. & vero miror, interpretationem illam à Te perceptam non esse, cum ex prop. 12. ²⁷⁾ quae octauae innititur, facile intelligi potuerit, additâ praesertim explicatione P. Saraslae coroll. 9. ²⁸⁾ confirmationum quadraturae, qui liber deesse

²⁷⁾ Voir la note 12; puisque la proposition est erronée, il était difficile d'en déduire le sens véritable du terme „continere”.

²⁸⁾ Dans le corollaire en question (p. 32 de son ouvrage) de Sarasa s'efforce de sauver la „Prop. 12” mentionnée en expliquant les étranges sous-entendus qu'on doit supposer pour comprendre la portée des propositions de Grégoire. En effet, ces sous-entendus sont bien propres à déconcerter celui qui consulte l'ouvrage de Grégoire. Ainsi l'addition des rapports représente chez lui deux opérations différentes qu'il discute amplement dans le „Scholion” à la „Prop. 6” du „Lib. 10” (p. 1102—1103 de son ouvrage). De cette façon il lui arrive de formuler des propositions étonnantes telle que la „Prop. 8”, p. 1104 du même „Lib. 10”, que nous citons, avec sa démonstration, comme échantillon. Disons d'abord que A, B, C, D sont des segments de droites de longueurs arbitraires et que AB signifie la somme des segments A et B.

Voici donc cette proposition: „Sint iam rationes AB ad CD, termini tam antecedens quam

pu vous manquer, vu un si grand voisinage des lieux et qu' il a paru deux années avant le vôtre ²⁹).

8. Pag. 37 ³⁰). *il n'a donc pas enseigné la manière de déterminer combien de fois le rapport du solide MΞ au solide ΛΣ contient le rapport du solide KΘ au solide ΔΓ et par conséquent ne pourrait pas non plus déterminer combien de fois ce rapport contient le rapport du solide HY au solide XV. D'où il paraît que ce rapport, même alors que les deux premiers sont donnés, ne peut être connu au moyen de ce que le très-savant auteur a trouvé, et que par conséquent il a espéré en vain de pouvoir effectuer de cette manière la quadrature du cercle.*

Ici est commise une erreur capitale, qui montre aussi que vous n'entendez pas la doctrine de l'auteur, car soit que vous preniez le mot *continere* dans le sens voulu par l'auteur et par moi précédemment expliqué, soit que vous y voyiez un *continere par multiplication* il a abondamment enseigné les deux modes de détermination comme il est démontré dans le scholium de la proposition 40. du livre 10 de l'opus Geometricum ³¹), d'où ce troisième rapport pouvait devenir connu par les inventions de l'auteur, de sorte qu'il n'a pas espéré en vain d'effectuer par cette voie la quadrature du cercle.

Il ³²) ne me reste maintenant que de rendre manifeste ce que j'ai posé dans ce qui précède, en disant que je démontrerais que le solide MΞ est au solide ΛΣ comme 53 à 203, et de même que le solide KΘ aurait au solide ΔΓ le même rapport que 5 à 11. Mais comme pour démontrer le premier il est nécessaire que nous sachions quel est le rapport de l'onglet parabolique à son cylindre de même base et de même hauteur; à cet effet faisant connaître ce rapport, nous allons augmenter le traité que le très-Savant Auteur donne sur cet onglet, dans la partie 5 du livre 9, d'un Théorème excellent, lequel je m'étonne que l'Auteur n'a pas trouvé lui-même parce qu'il se déduit facilement des choses qu'il avait déjà démontrées, ainsi qu'il paraîtra bientôt.

Vous vous trompez, très-Savant Seigneur, l'Auteur a vu et inventé ce Théorème il y a déjà trente ans et plus, mais comme celui-ci pouvait à tel point sans peine aucune se déduire de ce qu'il avait démontré, il ne l'a jugé digne que d'un corollaire et non pas d'une proposition. Voyez le corollaire ³³) de la proposition 99 du livre 9 de l'opus Geometricum où vous lisez ces mots: *De là est manifeste*

consequens diuisi, & antecedens quidem in A & B, consequens verò in C & D. Dico rationem AB ad CD, eandem esse cum ratione A ad C, B ad C, item A ad D, B ad D.

Demonstratio. Ratio A ad C, addita rationi B ad C, aequalis est rationi AB ad C (per 114 de proport.). Item ratio A ad D, addita rationi B ad D, aequalis est rationi AB ad D. Itaque cum ratio AB ad C, vna cum ratione AB ad D, aequalis sit rationi AB ad CD per præc. patet rationem AB ad CD, aequari rationibus A ad C, B ad C, vna cum rationibus A ad D, & B ad D".

Quant à la proposition précédente, sur laquelle la démonstration s'appuie, elle est comme il suit :

Tibi non poterat, in tanta locorum vicinitate, cum duobus annis ante tum prodierit ²⁹⁾).

8. Pag. 37. ³⁰⁾ *non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio solidi ME ad sol. $\Lambda\Sigma$, contineat rationem sol. K Θ ad sol. $\Delta\Gamma$, ac proinde nec determinari poterit, quoties haec ratio contineat rationem solidi HY ad solidum XV: quare liquet hanc rationem ne duobus quidem prioribus datis, per inuenta Clariff. viri cognosci posse, adeoque frustra ipsum sperasse hoc modo perficere circuli quadraturam.*

Hic error commissus est palmaris, qui etiam in Auctoris doctrina peregrinum Te offendit: siue enim verbum *continere* sumas in sensu ab Auctore intento & ante à me explicato, siue per illud intelligas *continentiam per multiplicationem*, vtrumque determinandi modum, abunde docuit vt osensum in schol. ad propof. 40. lib. 10. oper. Geom. ³¹⁾ vnde tertia illa ratio per inuenta Auctoris nota fieri potuit, adeoque non frustra hac viâ sperauit circuli quadraturam perficere.

Restat ³²⁾ *nunc tantum vt manifesta faciam, quae in praecedentibus posita fuere. dixi enim me demonstraturum, quod solidum ME esset ad sol. $\Lambda\Sigma$, vt 53 ad 203, item quod solidum K Θ , rationem haberet ad solidum $\Delta\Gamma$, quam 5 ad 11. quoniam autem ad horum primi demonstrationem necessarium est, vt notum habeamus, quae sit ratio vngulae parabolicae ad cylindrum suum, idcirco hanc rationem declarantes, tractatum Clar. viri quod de eadem vngula proposuit, vno egregio Theoremate audiorem reddemus; quod miror ipsum non inuenisse, cum ex iis quae iam ostenderat facili negotio deducatur.*

Falleris Clariff. Domine, Theorema illud & vidit & inuenit Auctor iam à triginta & quod excedit, annis: sed quia tam nullo negotio ex iis quae demonstrarat deduci poterat, corollario illud, non propositione dignatus est. Inspice corollarium ³³⁾ propof. 99. lib. 9. oper. Geom. in quo haec verba leges: *Hinc manifesta est ratio dignoscendi proportionem inter vngulam parabolicam & cylindrum, qui*

„Propositio VII. Sit rationis A ad BC consequens diuisum in B & C. Dico rationem A ad totam BC, eandem esse cum ratione A ad B. & A ad C”.

²⁹⁾ L'ouvrage de Sarasa, cité p. 156, note 7 du T. I, parut à Anvers en 1649; il porte en haut des pages la suscription „Confirmationes quadraturae”.

³⁰⁾ Voir le second alinéa de la p. 329 du T. XI.

³¹⁾ Il s'agit toujours du „Scolium”, ajouté par Aynscom à la „Prop. 40” du „Lib. 10”, laquelle dans l'ouvrage de Grégoire n'est pas pourvu d'un „Scolium”. Consultez la note 20, p. 254 du Tome présent.

³²⁾ Voir la p. 329 du T. XI à commencer par le troisième alinéa.

³³⁾ Voici le „Corollarium” en question qu'on trouve à la p. 1034 de l'ouvrage de Grégoire: „Hinc manifesta est ratio dignoscendi proportionem inter vngulam parabolicam, & cylindrum parabolicum qui vngulam continet, vel inter vngulam & residuum quod cum vngula parabolica cylindrum perficit. ex libro etenim quem praemisimus de parabola methodus colligi potest reducendi cylindrum parabolicum ad parallelepipedum illi aequale; cum verò hac praesenti propositione praxis demonstrata sit etiam vngulam ad parallelepipedum reducendi, quod eidem sit aequale: qui horum parallelepipedorum rationem cognouerit, etiam proportionem cognitas habebit, quae sunt inter cylindrum parabolicum eiusque vngulam”.

la manière de reconnaître le rapport entre l'onglet parabolique et le cylindre qui contient l'onglet, ou entre l'onglet et le reste du cylindre, etc. et je m'étonne grandement que vous ne l'avez pas lu, ou, si vous l'avez lu, de l'avoir dissimulé.

Du reste, avec tout votre examen de la Cyclométrie vous n'avez fait autre chose que de montrer que de deux rapports connus dont le premier multiplie le second autant de fois que ce dernier multiplie un troisième, ce troisième, par les inventions que l'Auteur a appliquées à la première quadrature, ne devient pas connu. Mais l'Auteur procède par une voie tout à fait différente et par conséquent n'a nullement eu l'intention de faire connaître de deux rapports également multipliés un troisième, parce que la solution de ceci dépend du métolabe. Il est donc manifeste que votre ἐξέτασις non seulement ne renverse pas la première quadrature de l'Auteur mais même ne la touche pas.

Cependant digne de louange est votre effort, *par lequel vous avez avec plus de diligence que de succès tenté une chose ardue* ³⁴). Ce n'est pas de peu d'importance que parmi tant d'excellents géomètres de ce siècle, vous, entre les premiers, vous vous avez choisi cette tâche. Qu'une autre fois cette étude, si vous avez le loisir de vous y appliquer, oblige l'Auteur et moi d'un nouveau bénéfice.



ungulam continet; vel inter unguam & residuum cylindri &c. atque hoc miror valdè, aut non legissè Te aut si legeris dissimulassè.

Caeterum cum toto Cyclometriae examine nil aliud egeris, quam ostendere quod ex notis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties haec multiplicat tertiam, per auctoris inuenta, quae primae adhibuit quadraturae, tertia non innotescat, Auctòr vero toto caelo diuersâ incedat viâ, adeoque ex duabus notis rationibus aequimultiplicatis, nullo modo intenderit tertiam notam facere, quia illius solutio dependet à meselabio, manifestum est *ἔξῃς* tuam, non solum primam Auctoris quadraturam non euertere, sed illam ne quidem impetere.

Laude tamen dignus est conatus tuus, *quo licet maiori diligentia quam successu rem arduam tentaueris*³⁴⁾, non exiguum est tot inter eximios hoc aevo geometras, Te primos inter, hanc Tibi prouinciâ delegissè, quod rursus studium, adhibere si vacet, & Auctorem & me nouo affeceris beneficio.



³⁴⁾ Allusion à la phrase qui suit, employée par Huygens dans la préface de l'ouvrage jumeau qui contient l'*ἔξῃς* tant: „Intellexi tandem, maiori subtilitate quam successu rem arduam tentatum fuisse”. Voir la p. 287 du T. XI.

CHRISTIANI HUGENII CONST. F.

A D

C.V. FRAN. XAVER. AINSCOM, S.I.

EPISTOLA,

Qua diluuntur ea quibus *Théorème* Cyclometriæ *Gregorij à S.^{te} Vincentio* impugnata fuit.

HAGÆ-COMITUM,

Apud ADRIANUM VLAACQ.

MDCCLVI.

AU TRÈS-SAVANT SEIGNEUR FR. XAVERIUS AINSCOM
CHRISTIAAN HUYGENS PRÉSENTE SES SALUTATIONS ¹⁾.

Le livre ²⁾, qu'en votre nom vient d'envoyer ici votre Apelles Seghers ³⁾, me fut, très-savant seigneur, aussi bien venu que le font ordinairement les choses dont la longue attente augmente le désir ⁴⁾. Depuis longtemps déjà j'avais appris que vous aviez entrepris le patronage de la Quadrature de Vincentius et tout récemment on manda de Louvain et de Rome que l'ouvrage était déjà conduit par vous presque jusqu'à sa fin et qu'une partie était aussi consacrée à notre Exetasis ⁵⁾. Aussi, non seulement parcourai-je tout votre commentaire avec avidité, mais peiai-je plus exactement encore ce qui me regardait plus spécialement, et je résolus de vous écrire brièvement ce que j'en pense. Quant à moi je me suis étonné que, malgré que vous ne me nommiez nullement en dernier lieu ⁶⁾ parmi ceux qui plus solidement que d'autres se sont occupés de votre Quadrature ⁷⁾, vous déclariez plus loin ⁸⁾ à tel point sans valeur toutes mes objections et tous mes arguments, qu'ils ne touchent pas même ce qu'ils tâchent de renverser. Car dans le chemin même que j'ai pris, et du tout au tout comme on dit, je me serais trompé et je n'aurais nullement failli l'intention de celui que j'ai voulu réfuter. Toutefois, des gens très-savants ont déclaré que j'avais renversé de fond en comble les fictions de vous autres, et à leurs jugements, malgré que vous peut-être ne les partagiez pas, je crois que les gens intelligents accorderont beaucoup plus de prix qu'à l'opinion de ceux qui félicitent vous et les vôtres sur la quadrature trouvée. Parmi les membres de votre société le très-excellent Tacquet m'a répondu *qu'il avait lu avec attention et beaucoup approuvé notre Exetasis, et que j'avais de plein droit*

¹⁾ La présente lettre publique de Huygens à Aynscom fut déjà insérée parmi la „Correspondance” aux p. 492—502 de notre Tome I, où l'on trouvera dans les notes qui l'accompagnent plusieurs variantes empruntées à une minute écrite de la main de Huygens. Il nous semblait toutefois que cette lettre ne devait pas être omise parmi les autres ouvrages imprimés de Huygens, ne fût-ce qu'à cause de la traduction française que nous ajoutons.

²⁾ L'ouvrage d'Aynscom mentionné à la p. 244 du Tome présent.

CL. VIRO D^o. FR. XAVERIO AINSCOM CHRISTIANUS
HUGENIUS S. D. ¹⁾

Liber ille ²⁾ quem non ita pridem tuo nomine huc misit Apelles vester Segerus ³⁾, tam mihi acceptus fuit, Vir Clariss. quàm solent esse ea quorum diutina expectatio desiderium auget ⁴⁾. Jam diu enim intellexeram te Quadraturae Vincentianae patrocinium suscepisse, novissimèque & Lovanio & Româ significatum fuerat opus illud jam penè à te ad umbilicum perductum, in quo pars etiam quaedam nostrae Exetasi dicata esset ⁵⁾. Itaque cum avidè totum commentarium tuum evolvi, tum accuratius reliquis illa expendi quae propiùs ad me pertinebant. De quibus quid visum fuerit breviter tibi perferibere constitui. Equidem miratus sum, cum me non ultimum inter eos recenseras ⁶⁾ qui caeteris solidiùs in examinanda Quadratura vestra ⁷⁾ versati sint, postea tamen ⁸⁾ adèd nihili animadversiones omnes meas, omniaque argumenta praedicare, ut quod convellere nituntur, id ne attingant quidem. Nempe ego totâ viâ, totoque, quod ajunt, coelo erravi, quemque refutare volui, ejus mentem minimè sum affecutus. Veruntamen Viri Doctissimi funditè evertissè me commenta vestra pronunciavere, quorum judiciis, etsi vos fortassè non statis, apud intelligentes tamen multò pluris futura reor quàm eorum qui vobis de reperta Quadratura gratulantur. E societate vestra Vir eximius A. Tacquetus, *accuratè sibi lectam esse multumque probari Exetasin nostram rescripsit, & rectè me urgere auto-*

³⁾ Consultez, sur le père Jésuite Daniel Seghers, peintre de renom, la note 1 de la Lettre N^o. 96, p. 147 du T. I.

⁴⁾ Consultez à ce propos les pp. 242 et 244 du Tome présent.

⁵⁾ Voir la „Responsio III. Ad *Ætæolæ* Clariss. D. Christiani Hugeniij”, p. 249—261 du Tome présent.

⁶⁾ Voir, pour le passage en question, la note 18, p. 244 du Tome présent.

⁷⁾ C'est-à-dire la quadrature de Grégoire, rédigée, comme celui-ci l'avait avoué (voir le troisième alinéa de la p. 242 du Tome présent), par ses élèves, parmi lesquels Aynscom occupait sans doute une place importante. C'est ce qui explique le pluriel du latin, ici et souvent dans la suite.

⁸⁾ Il s'agit d'un passage de la „Responsio III”, voir la p. 261 du Tome présent.

*appuyé sur ce que l'Auteur de la Quadrature avait à expliquer, combien de fois le premier rapport contient le second et celui-ci le troisième, et que, s'il y restait en défaut, il ne serait jamais connaître le troisième inconnu et par conséquent ne donnerait pas la Quadrature laquelle dépend de la connaissance de ce troisième rapport*⁹⁾. Un autre, également de votre Compagnie, est le très savant Van Gutschoven, duquel je fais qu'à l'occasion il avoue que les grands efforts du père Grégoire ont complètement échoué par suite de notre travail¹⁰⁾. Telle est aussi l'opinion du professeur de mathématiques de l'Académie d'Oxford J. Wallis, savant universel, ce qu'il fit paraître publiquement dans son très subtil ouvrage récemment édité de l'Arithmétique des Infinis¹¹⁾. Et je pourrais citer plusieurs autres qui compteraient pour mon parti si je n'étais convaincu qu'en Géométrie il faut agir plus par raisonnement que par autorité. Et sans doute vous allez dire que ceux qui m'applaudissent sont emportés par la même erreur que moi, et qu'ils ont eux-mêmes aussi peu pénétré le sens de votre Auteur. Pour cette raison je m'appliquerai plutôt à débarrasser ceux-ci, autant que moi même, de l'accusation d'ignorance ou de bravade. Toutefois je crois devoir répondre auparavant à quelques autres choses que vous m'objectez. J'ai tâché, en présentant diverses conjectures, à rendre probable que des quatre quadratures vous donnez la préférence à celle qui est posée la première. C'est ce que vous réjetez¹²⁾ de manière à dissimuler et à passer l'argument que j'avais dit être le principal. Quant à moi, qu'il vous soit permis de placer cette première quadrature au lieu qui vous plaira. Moi je jugerai avoir abondamment accompli mon dessein lorsque je démontrerai qu'elle est absurde et je ne crois pas que celui auquel j'aurai rendu cela évident, demandera la réfutation des trois autres et même que, si elle lui fût offerte, il la lira. Car il est tellement certain qu'elles reposent sur les mêmes principes, favorir sur la doctrine des Proportionnalités et de ce qui est dit de la construction d'un solide au moyen de deux figures planes, que cela ne pourrait être nié. C'est ce que vous niez cependant et à diverses reprises vous insistez¹³⁾ sur ce que votre Auteur, dans cette première Quadrature, ne s'est pas servi de la considération des Proportionnalités. Mais je ne m'explique point votre audace; car vous n'ignorez pas que l'une comme l'autre, les propositions 12, 39 et 40 du livre 10 sont démon-

⁹⁾ Voir la lettre de Tacquet du 2 décembre 1652, p. 194 du T. I.

¹⁰⁾ Voir sa lettre du 10 février 1653, p. 219 du T. I.

¹¹⁾ Voici ce qu'on trouve, à propos de l'ouvrage de Grégoire et de la critique de Huygens, dans la „Dedicatio” de l'ouvrage mentionné de Wallis (cité dans la note 2, p. 340 du T. I.): „Monuit autem eorum aliquis” [c'est-à-dire un des savants anglais auxquels Wallis avait proposé un problème se rattachant à sa quadrature du cercle au moyen d'un produit infini] „ut Gregorii a Sancto Vincentio Opus Geometricum consulerem, (cujus ne nomen quidem antea audiveram,) ut qui magno volumine hujusmodi res quae ad circuli Quadraturam spectant exposuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumque utut tanto erat volumine ut non

rem Quadraturae, ut exhibeat, quoties ratio prima contineat secundam & secundam tertiam, idque nisi praeflet, tertiam incognitam explicaturum nunquam, ac proinde non daturum quadraturam, quae à notitiis tertiae illius rationis dependet ⁹⁾. Alter item apud vos est Clarissimus Gutschovius, quem passim profiteri scio magnos P. Gregorii conatus nostrâ operâ penitus concidisse ¹⁰⁾. Neque aliter sentit Vir undiqueque Doctissimus & in Academia Oxoniensi Mathematicum Professor J. Wallisius, idque publicè testatum fecit in edito nuper subtilissimo opere de Infinitorum Arithmetica ¹¹⁾. Possẽmque & alios complures referre quorum pro me facit calculus, ni persuasum haberem in re Geometrica rationibus magis quam autoritate agendum. Neque enim dubito quin dicturus sis, eodem mecum errore ductus qui mihi applaudunt, ipsos quoque nihilo rectius penetrasse sentia autoris tui. Quare id agam potius, ut procul à me simul atque illis hanc, sive incertitiae, sive oscitantiae culpam amoliar. Prius autem ad alia quoque nonnulla quae mihi objicis respondendum opinor. Variis allatis conjecturis verisimile reddere conatus eram, ex quatuor quadraturis eam à vobis praeferrî quae prima ponitur. Hoc ita refutas ¹²⁾, ut, quod ego praecipuum argumentum dixeram, dissimules praetereaſque. Verum per me licet ut quo loco vobis visum erit primam quadraturam habeatis. Ego me abundè praestitisse arbitror si hanc absurdam esse evincam: cuique hoc planum fecero, eum non puto reliquarum trium confutationem expectiturum, imò, si offeratur, ne lecturum quidem. Etenim quod iisdem omnes principiis innituntur, Proportionalitatum nimirum doctrinae atque ei quae est de ductibus plani in planum, tam certum est, ut negari nulla ratione possit. Negas tu tamen hoc, crebroque inculcas ¹³⁾, in prima hac quadratura, proportionalitatum consideratione, non uti autorem tuum. Sed miror qua fronte; cum non ignores utique propositionem 12. 39. & 40. libri 10.

integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcumque; sollicitus an inde quae ad rem nostram facerent reperire possem. Inveni autem aliquando easdem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) speculationes obtigisse, licet diversis methodis eo pervenerimus, Exempli gratia, quod appellat ille *plani in planum ductum*, id ipsum est quod nos & hic, & in Tractatu de Conicis sectionibus (qui huic gemellus est eodem anno 1652 conceptus & primitus formatus,) dicitur, *ductus rectarum omnium unius plani in alterius respectivas rectas*. . . . Et alia fortasse nonnulla . . . Verum (utut ille multa habeat acute inventa, methodo à nostra plane aliena) illud quod apud eum maxime quaecebam nusquam inveni, neque enim ille vel consue rem perduxerat, nec etiam circuli quadraturam, quam se invenisse perhibet, omnino attingit, sed ad propositionem nostrae prop. 136, non multum absimilem ubi pervenerat, ratus inde se circuli quadraturam invenisse, non tamen assecutus est; uti in *Εξέτασι* sua ostendit D. Hugenus.

Quant à la „prop. 136”, Wallis y démontre que la quadrature du cercle dépend de la cubature du solide produit par l'application de l'opération „ducerer planum in planum” aux demi-paraboles IXTB et AYVG de la figure de la p. 254 du Tome présent, c'est-à-dire du même solide dont Grégoire a fait emploi dans sa quadrature prétendue.


¹²⁾ Voir les §§ 2 et 3 de la „Responsio III”, p. 251 du Tome présent.

¹³⁾ Voir le § 4, p. 251 — 253 du Tome présent.

trées au moyen de la 8^{me} ¹⁴⁾ du même livre et cette dernière par la prop. 114 du livre 8, qui tout entier traite des Proportionnalités.

Ensuite vous dites ¹⁵⁾ que j'ai pris une peine superflue en faisant connaître les deux rapports numériques des solides, desquels vous aviez à déduire le troisième; en effet, l'auteur de l'opus *Geometricum*, s'il faut vous croire, les aurait déjà reconnus et démontrés à d'autres longtemps avant que mon ouvrage et même que moi j'avais vu le jour. Mais pourquoi alors, je vous prie, ne les a-t-il pas fait connaître en nous délivrant de cette peine. Car il est certain que leur connaissance devait contribuer la plus grande partie et être tout à fait nécessaire à effectuer la quadrature, si seulement celle-ci fût possible à accomplir. Mais je vois que vous nommez toutes les choses que, pour une raison quelconque, vous vous imaginez pouvoir être connues, aussi connues que celles qui ont manifestement été trouvées. Ainsi vous me renvoyez à la proposition 43 du livre 10 dans laquelle vous prétendez que l'un et l'autre rapport sont devenus connus. Mais cette proposition les donne aussi peu ¹⁶⁾ que la dernière proposition de ce livre ne donne le rapport entre le cercle et le carré sur son diamètre. D'ailleurs, ceci ressemble à ce que vous répondez au sujet de l'onglet Parabolique ¹⁷⁾. Savoir que votre auteur aurait déjà découvert, il y a trente ans, quel est le rapport de cet onglet au cylindre. Quant à moi j'ai avoué ¹⁸⁾ que ce rapport pouvait être déduit de ce que l'auteur avait déjà communiqué; mais qu'il n'avait pas fait connaître le rapport même me semblait un argument assez évident qu'il n'en connaissait pas le résultat. Car il n'était guère admissible que, le considérant comme superflu, il eût laissé de le mettre par écrit, s'il espérait pouvoir le trouver avec si peu de peine, tandis que pour arriver au théorème il avait développé dix-huit propositions ¹⁹⁾. Il importe peu s'il l'avait jugé digne d'être mis dans une proposition, ce que vous dites qu'il n'avait pas voulu faire, ou seulement dans un corollaire. Mais même dans un corollaire le rapport ne se trouve indiqué nulle part. Car dans celui que vous citez on lit seulement qu'une méthode est communiquée, par laquelle on peut rechercher le rapport de l'onglet au cylindre qui le contient, et qu'il serait connu si les rapports de quelques solides entre eux eussent été trouvés. Mais il laisse aux lecteurs de rechercher aussi bien les rapports de ces solides que leur analogie avec celui de l'onglet et son cylindre: ce que vous même vous n'ignorez pas. C'est

¹⁴⁾ Voir la proposition reproduite dans la note 28, p. 257—258 du Tome présent. On y trouve citée en effet la „Prop. 114” du Lib. 8” (p. 926 de l'ouvrage de Grégoire), laquelle est comme il suit:


„Data sit quacvis quantitas AC, vtemque diuisa in B, & alia quantitas D. Dico rationem AB ad D, vna cum ratione BC ad D, aequalem esse rationi AC ad D.”

Il est clair d'ailleurs, que ce n'est pas de l'emploi de cette proposition évidemment juste que provient l'erreur de Grégoire, attribuée par Huygens dans l'*'Eἰσαγωγὴ* (p. 317 du T. XI) à l'application peu heureuse des „inventions” de Grégoire „en matière de proportionnalités.” Ainsi l'argumentation peut ne pas sembler tout à fait digne de Huygens; mais remarquons

ex 8^{va}.¹⁴⁾ ejusdem libri demonstrari, hanc verò per 114. libr. 8. qui totus est de Proportionalitatibus.

Porro superfluum me ais¹⁵⁾ operam sumptisse, cum priores duas corporum rationes numero exhibui, ex quibus tertia vobis definienda erat; illas enim autor operis Geometrici, si credimus, multò antè quàm ego edidissèm, imò quàm ipse editus essem, perspectas habuit aliisque demonstravit. Quaeso cur non explicuit igitur, nosque ea levavit molestia? Nam certum erat plurimùm ad absolvendam quadraturam, si modo absolvi posset, eorum notitiam conferre debere, planèque esse necessariam. Sed vobis cuncta perinde nota dici video quae cognosci posse aliquà saltem ratione imaginamini, atque ea quae liquidò comperta fuerint. Itaque ad propof. 43. lib. 10. me remittis, in qua utramque rationem notam fieri asseris. Illa verò non magis ipsas expedit¹⁶⁾ quam propositio postrema ejusdem libri, rationem quae sit inter circulum & quadratum diametri. Prorsus huic simile est quod de Parabolica ungula respondes¹⁷⁾. Videlicet jam à triginta annis exploratum habuisse autorem tuum, quatenam sit illius ad cylindrum suum proportio. Equidem ex iis quae jam tradiderat, erui illam posse fassus sum¹⁸⁾; ipsum verò adhuc ejusmodi foret nescivisse, satis evidens argumentum videbatur, quod eam non expromeret. Neque enim credibile, cuius theorematibus gratia duodeviginti¹⁹⁾ propositiones elucubrasset, id tanquam superfluum non esse adscripturum, si tam nullo negotio inveniri posse speraret. Parum intererat utrum propositione illud dignatus fuisset, (quod noluisse eum dicis) an corollario tantum. Sed nec in corollario ratio illa uspiam expressa est. Nam in eo quod adducis, hoc solum legitur, methodum traditam esse qua ratio ungulae ad cylindrum quo continetur, investigari queat, eamque notam fore, si quorundam inter se corporum rationes inventae fuerint. Atqui & horum corporum rationes, & ex iis quae sit inter ungulam cylindrumque suum analogia, lectoribus disquirenda relinquuntur: idque ipse non nescis. Quare non

qu'il ne s'agit ici de sa part que de détruire le subterfuge futile d'Aynskom qui avait voulu nier que des propositions comme les „Prop. 8” et „12” du „Lib. 10”, lesquelles Huygens avait eu en vue, n'appartiendraient pas à la matière des proportionalités laquelle fut traitée par Grégoire dans le „Lib. 8. De Proportionalitatibus”.

¹⁴⁾ Voir le § 7 de la „Responsio III”, p. 255—257 du Tome présent.

¹⁵⁾ En effet, la „Prop. 43”, mentionnée p. 279 du T. XI au § 8, ne conduit pas aisément à des résultats numériques.

¹⁶⁾ Voir le quatrième alinéa du § 8, p. 259—261 du Tome présent.

¹⁷⁾ Voir le quatrième alinéa de la p. 329 du T. XI.

¹⁸⁾ Il s'agit des dix-huit premières propositions, p. 1020—1033, de la „Pars quinta” du „Lib. 9”, lesquelles précèdent la dix-neuvième de la même „Pars”, laquelle est comme il suit: „Prop. 99: Oportet ungulae cylindri parabolici parallelepipedum aequale exhibere”. En effet, cette „Pars quinta” est consacrée presque entièrement à la cubature de l'onglet parabolique; mais on n'y rencontre pas le théorème simple énoncé par Huygens dans l'avant-dernier alinéa de la p. 329 du T. XI.

pourquoi vous avez mauvaise grâce de m'accuser à ce sujet de dissimulation, lorsqu'il vous-même vous paraîsez écrire le contraire de ce que vous pensez.

Mais examinons maintenant l'erreur *capitale* que vous m'attribuez ²⁰⁾. Elle serait commise au sujet du mot *continere*, d'où, comme je ne l'aurais pas bien compris, il serait arrivé que, croyant combattre votre Quadrature, je n'eusse rien fait moins que cela, et que de même tous ceux, qui ont cru que je l'avais fait chanceler, eussent été aveugles. Quant à moi, j'ai cité la double signification que j'avais trouvée de ce mot dans l'opus Geometricum, mais j'ai passé la vôtre ²¹⁾ qui est aussi celle du Père Sarafa; parce que je l'ignorais alors. Ainsi mon erreur *capitale* consiste en ceci, qu'à cette époque je n'avais vu ni le livre du Père Sarafa ²²⁾, ni votre corollaire. Mais peut-être, si j'eusse connu votre explication je n'aurais pas pour cela jugé à propos de la mentionner, parce qu'elle importe si peu pour la question et qu'elle est complètement monstrueuse et absurde comme il paraîtra par l'exemple que vous y ajoutez: je montrerai ensuite de combien vous avancez la chose par elle. La proposition 40 du livre 10 est ainsi conçue: *Ceci étant posé, je dis que le rapport du solide produit par RS sur XY au solide par TV sur Z& contient autant de fois le rapport du solide par IK sur NO au solide par LM sur PQ que ce même rapport contient le rapport du solide par AB sur EF au solide par CD sur GH* ²³⁾. Proposition que vous, *selon l'intention*, comme vous dites, de l'Auteur (bien entendu après avoir changé la phrase), vous nous reproduisez en ces termes: *Ceci étant posé, je dis que le rapport du solide produit par RS sur XY au solide par TV sur Z& est composé des rapports qui sont autant de fois les multipliés des rapports qui composent le rapport du solide par IK sur NO au solide par LM sur PQ que ces mêmes rapports sont les multipliés de ceux dont se compose le rapport du solide par AB sur EF au solide par CD sur GH*.

La belle explication! Et c'est pour ne pas l'avoir attrappée que je n'ai pas faisi le sens qui convient à vos raisonnements. Mais à qui peut-il venir dans l'esprit qu'un mathématicien écrive toute autre chose que ce qu'il demande à comprendre? ou qui voudrait appliquer un sens encore plus compliqué à des théorèmes déjà trop obscurs? Certainement vous savez que tous ceux qui sont entrés en controverse avec vous autres ont pris le mot *continere* dans le même sens que moi et qu'à personne il n'est venu dans la pensée qu'en lisant sur le rapport de deux grandeurs, il eût à appliquer ceci aux rapports *partiels* dont se composent les rapports *totaux*? ²⁴⁾ Mais voici quelle fut, en dehors de ceux dont les remarques sont parvenues entre vos mains, l'opinion presque identique avec la nôtre de l'Incomparable Descartes, duquel si vous estimez qu'il fut moins excellent géomètre qu'Algèbriste ²⁵⁾ vous

²⁰⁾ Voir le second alinéa du § 8, p. 259 du Tome présent.

²¹⁾ Comparez le dernier alinéa du § 7, p. 257 du Tome présent.

²²⁾ L'ouvrage mentionné à la p. 242 du Tome présent.

²³⁾ C'est la proposition 40 de Grégoire telle qu'on la trouve rédigée à la p. 98 de l'ouvrage

fatis ingenuè hic me dissimulationis arguis, ubi ipse contra quam sentias, scribere videaris.

Jam verò de *palmari* errore ²⁰⁾ quem mihi impingis videamus. Is circa verbum *continere* commissus est, ex quo non rectè percepto factum est scilicet, ut, cum Quadraturam vestram oppugnare me crederem, nihil minus egerim, omnesque item, qui me labefecisse eam judicarunt, caecutierint. Ego significationem duplicem ejus verbi quam in opere Geometrico inveneram, adduxi, tuam, quae & P. Sarrafae est, interpretationem, quoniam adhuc ignorabam, praeterii ²¹⁾. Igitur hic *palmaris* est error meus, quod nec P. Sarrafae librum ²²⁾, nec tuum Corollarium tum temporis videram. Sed nec fortasse si scivissem explicationem vestram, propterea memorandam duxissem, cum parum aded ad rem faciat, sitque monstrosa planè atque absorta, uti ex adjecto specimine liquebit: quantum verò ea promoveritis deinde exponam. Propositio 40. libri 10. est hujusmodi. *Isidem positis, dico rationem solidi ex RS in XY ad solidum ex TV in Z&, toties continere rationem solidi ex IK in NO ad solidum ex LM in PQ, quoties haec ipsa ratio continet rationem solidi ex AB in EF ad solidum ex CD in GH*²³⁾. Quam propositionem juxta mentem, ut ais, auctoris, (variata tantum phrasi scilicet) sic nobis enarras. *Isidem positis, dico rationem solidi ex RS in XY ad solidum ex TV in Z&, constitui ex iis rationibus quae toties multiplicatae sunt illarum rationum ex quibus constituitur ratio solidi ex IK in NO ad solidum ex LM in PQ, quoties haec ipsae rationes multiplicatae sunt earum ex quibus constituitur ratio solidi ex AB in EF ad solidum ex CD in GH*.

Pulchra verò explanatio! quam quia ego pervidere non valui, sensum convenientem ratiociniis vestris non percepi. At cui hoc in mentem veniret, Mathematicum longè aliud scribere quam intelligi postulet? quisve magis adhuc intricatum sensum theorematibus jam nunc nimium obscuris allingere vellet? Omnes profectò qui vobis controversiam moverunt, haud aliter atque ego, verbum *continere* acceperisse nosci, neque ulli hoc incidisse, ut cum de ratione inter duas magnitudines legeret, id ad *partiales* referret, ex quibus *totales* constituerentur ²⁴⁾. Ecce verò ut praeter eos quorum animadversiones ad manus vestras pervenere, eadem planè quae nobis, circa has propositiones & significationem verbi *continere*, opinio fuit Incomparabili Cartesio, quem si minus insignem Geometram quam *Algebristam* fuisse arbitraris ²⁵⁾, parum ex vero judicas. Ejus

d'Aynscom. Ensuite celui-ci fait suivre, en guise d'introduction à la rédaction modifiée qui suit, la phrase: „Hoc est iuxta auctoris mentem”.

²⁴⁾ Consultez sur cette partie de la réplique de Huygens la note 20, p. 254 du Tome présent.

²⁵⁾ Il s'agit d'un passage, p. 108 de l'ouvrage d'Aynscom, où celui-ci, pour diminuer l'autorité de de Roberval, qui avait été cité en témoin par Auzout comme approuvant la critique de Mersenne, en appelle à l'opinion défavorable de Descartes sur de Roberval. Voici ce passage dont d'ailleurs Huygens avait marqué sa désapprobation dans sa lettre à de Roberval de 20 juillet 1656, p. 457—458 du T. I:

„Equidem de viri [de Roberval] illius fama, nihil detractum volo: at cum nulla illius opera

jugez à tort. De lui on m'a communiqué la copie d'une lettre ²⁷⁾ à un ami ²⁶⁾, longtemps après qu' eut paru notre Exetasis ²⁸⁾; comme non seulement elle confirme ce que j'ai dit, mais de plus se rapporte toute entière à l'opus Geometricum du Père St. Vincent, j'ai cru devoir la transcrire intégralement ici. Le texte français est le suivant.

MONSIEUR.

J' Ay gardé vos livres un peu long temps, pource que je desirois en vous les renvoyant, vous rendre compte de la Quadrature du cercle pretendue, & j' avois bien de la peine à me resoudre de feuilleter tout le gros volume qui en traite. En fin j'en ay veu quelque chose & assez ce me semble pour pouvoir dire qu'il ne contient rien de bon qui ne soit facile, & qu'on ne pust escrire tout en une ou deux pages. Le reste n'est qu'un paralogisme touchant la Quadrature du cercle, enveloppé en quantité de propositions qui ne servent qu'à embrouiller la matiere, & sont tres simples & faciles pour la pluspart, bien que la façon dont il les traite, les face paroître un peu obscures. Pour trouver son paralogisme, j'ay commencé par la 1134^e page, ou il dit: Nota autem est proportio segmenti LMNK ad segmentum EGHF ³⁰⁾, ce qui est faux, & la preuve qu'il en donne est fondée sur la 39^e proposition en la page 1121. du mesme livre ³¹⁾, ou il y a une erreur tresmanifeste, qui consiste en ce qu'il veut appliquer à plusieurs quantitez conjointes ce qu'il a prouvé auparavant des mesmes quantitez divisées. Car par exemple, ayant les 4. ordres de proportionelles 2, 4, 8, 2, 8, 32.

&

2, 6, 18, 2, 10, 50.

bien qu'il soit vray que 8. est à 32. en raison doublée de ce que 4. est à 8. Et que 18. est aussi à 50. en raison doublée de ce que 6. est à 10. il n'est pas vray pour cela que 8 + 18. c'est à dire 26. soit à 32 + 50. c'est à dire 82. en raison double de celle qui est entre 4 + 6. c'est à dire 10, & 8 + 10, c'est à dire 18. Tous ses raisonnements ne sont fondez que sur cette faute, & ce qu'il escrit de Proportionalitatibus & de Duellibus ³²⁾, ne sert qu'à l'embarasser, & ne me semble d'aucun usage, pour ce que frustra sit per plura quod potest fieri per pauciora.

(si quae ediderit) videre hic contigerit, adeoque de illius in Geometricis scientia indicare non possim, nihil est magnoperè cur ipsius auctoritate standum mihi sit: eorum porro iudicio viri capacitatem qui norunt, credere me si velit Censor [Auzout], audiat quid de illo, ad amicum perscripserit è Succia homo Gallus, idem & Algebrista egregius Renatus Des Cartes: verba huius sunt ipsissima: Mais ie suis a present en un pais si éloigné, que ie ne puis mesme esperer d'y voir les escrits dont vous me parlez: car outre qu'il seroit difficile de les apporter icy, ie n'y aurois pas aussi beaucoup de loysir pour les examiner: c'est pourquoy si vous escrivez au R. P. Gregorius à S. Vincentio, ie vous prie de l'asseurer de mon tres-humble service, & de luy faire sçavoir de ma part, que bien que ie n'approuve pas sa quadrature de cercle, ie ne crois pas neanmoins que le S. A. R[observa] ait assez d'esprit pour la refuter. & ainsi que pendant qu'il n'aura point d'adversaires plus forts que celui-là, il ne luy sera pas malaysé de se défendre".

Quant à ce dernier fragment d'une lettre de Descartes à un inconnu, il a été reproduit par

ad amicum ²⁶⁾ epistolae copia mihi facta est ²⁷⁾, cum jam diu exetasis nostra prodisset ²⁸⁾, quâ quoniam non tantum id quod dixi comprobatur, sed & tota insuper ad opus Geometricum P. à Sto. Vincentio pertinet, integram hic adscribere visum est, Gallicè sic habet ²⁹⁾.

.....

.....

Quorum latinè haec est sententia.

Libros tuos retinui diutius, quod remittere eos nolebam quin simul opinionem meam tibi exponerem de nova ista quam venditant circuli Quadratura; vix autem à me ipso impetrare poteram, ut ingentia quibus tractatur volumina evolverem. Tandem tamen nonnulla in iis delibavi, è quibus satis tuto mihi pronunciare posse videor, nihil ibi boni inveniri, quod non captu facile sit; undque aut alterâ paginâ explicari poterit. Caetera merum paralogisimum de quadratura circuli continent, multis propositionibus implicitum, quaeque hoc tantum efficiunt, ut omnia evadant intricatiora. Pleraque verò simplicissimae sunt & facili ratione constant, licet tractandi methodus obscuriores reddiderit. Paralogisimum quaerere institui, initio facto ad paginam 1134. ubi hoc ait: Nota autem est proportio segmenti LMNK ad segmentum EGHF ³⁰⁾; quod falsum est, pendet enim hujus demonstratio à propositione 39, pagina 1121. ejusdem libri ³¹⁾, ubi manifestus error occurrit, dum pluribus quantitibus conjunctim applicatur, quod de singulis seorsim fuerat ostensum. Etenim ex. gr. positis quatuor proportionalium ordinibus 2, 4, 8, 2, 8, 32,

2, 6, 18, 2, 10, 50,

licet verum sit rationem 8. ad 32. duplicatam esse ejus quae 4. ad 8. itemque rationem 18. ad 50. duplicatam esse ejus quae 6. ad 10. non tamen idecirco verum est 8 + 18. hoc est, 26. esse ad 32 + 50. hoc est ad 82. in ratione duplicata ejus quae 4 + 6. hoc est, 10. ad 8 + 10. hoc est, 18. Unicum ei fundamentum haec vitiosa argumentatio; quaeque de Proportionalitatibus scribit & de Duclibus ³²⁾, tantum majoribus ipsam difficultatibus involvunt, neque alicujus usus videntur, siquidem frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.

Adam et Tannery, à la p. 465 du T. V de leur édition récente des Œuvres de Descartes.

²⁶⁾ Il s'agit du professeur de Leiden, Frans van Schooten.

²⁷⁾ Consultez la Lettre N^o. 169 du 13 décembre 1653, p. 258 du T. I.

²⁸⁾ Puisqu'elle parut en décembre 1651; voir la p. 275 du T. XI.

²⁹⁾ Voir, à côté, cette version française.

³⁰⁾ Il s'agit de la proposition 53, sur laquelle on peut consulter le § 1 de la p. 277 du T. XI; les segments LMNK et EGHF, dont il est fait mention ici, correspondent aux aires CDHI et EFLK mentionnées au lieu cité, p. 277 du T. XI.

³¹⁾ Consultez, sur cette proposition, le § 10 de la p. 280 du T. XI et la page 317 du même Tome avec les notes 6, 7 et 8.

³²⁾ Voir les „Lib. 8^o et „^o de l'ouvrage de Grégoire, sur lesquels on peut consulter la p. 317 du T. XI.

Dont le sens est en latin ³³⁾ :

.....

Vous voyez, excellent Seigneur, que Descartes non plus n'eût reconnu votre *Ceci est conforme à l'intention de l'auteur* ³⁴⁾, mais eût dit plutôt, ce qui est réellement le cas, que dans une cause désespérée vous avez cherché ce faux fuyant afin que votre Quadrature en changeant continuellement de forme à l'instar de quelque Protée, puisse échapper à ceux qui la resserrent de plus en plus. Mais, eh bien, regardons maintenant de près à quoi vous ramenez la chose après que vous avez tiré du mot *continere* une nouvelle signification par laquelle vous avez si favorablement remis à neuf de vieux théorèmes. Dans le Corollaire de la proposition 40 du livre 10, que vous invoquez si fréquemment ³⁵⁾, vous ne semblez avoir fait autre chose qu'entrelacer les difficultés les unes aux autres afin que celui qui désirerait saisir le sens de votre argumentation en fût fatigué avant qu'il ne fût arrivé à la fin. Quant à moi je vous ai suivi jusqu'à l'endroit où vous faites intervenir les espaces Y et Z. J'ai cru qu'il ne fallait pas aller plus loin. Car votre construction est si manifestement vicieuse et anti-géométrique que je ne puis douter que vous vous en étiez aperçu vous-même, mais, parce que vous ne trouviez pas d'autre moyen d'évasion vous avez espéré, je crois, que dans une telle obscurité personne ne s'en apercevrait facilement. Ensuite, dites vous, *considérons deux plans Hyperboliques Y & Z renfermés entre des droites, parallèles à l'autre asymptote* ³⁶⁾. Vous ne les affujettissez à aucune autre condition que de les enfermer entre des droites parallèles à l'autre asymptote. Vous ne prescrivez rien quant à la grandeur de l'une ou de l'autre ou du rapport qu'ils doivent avoir entre eux. Par conséquent, on pourra découper chacun d'eux aussi grand ou aussi petit que l'on veut. Mais bientôt après vous vous mettez à comparer le rapport de l'espace Y à Z à d'autres rapports que vous avez admis d'après une détermination définie et vous vous proposez de démontrer *que le rapport total des plans X à T est également multiplié du rapport total de Y à Z que le rapport total des solides GH à IK est multiplié du rapport total du solide LM à NO*. Quoi donc, je vous prie, est plus absurde que d'affirmer quelque chose sur la grandeur d'un rapport qui est complètement incertain et vague ? Pour moi, je suis d'avis que par cela seul il est assez clair combien vains ont été vos efforts d'apporter quelques appuis à la première Quadrature, puisque dans ce que vous aviez à expliquer en premier lieu vous faillez si lourdement. S'il me fallait recher-

³³⁾ Voir cette version latine à la p. 273.

³⁴⁾ Voir, sur cette phrase, la note 23, p. 270.

³⁵⁾ Il s'agit du „Scholium” mentionné dans la note 20, p. 254 du Tome présent.

³⁶⁾ La Société Hollandaise des Sciences de Harlem est en possession de l'exemplaire de l'ouvrage d'Aynscom qui a appartenu à Huygens. La seule annotation, faite de la main de Huygens, qu'on y trouve (p. 102), se rapporte au passage cursivé ici. Elle est comme il suit: „Cum nulla horum magnitudo definiatur; neque inter se neque ad aliud, poterunt pro

Vides, Vir Egregie, neque Cartesium, vestrum illud *Hoc est juxta mentem autoris* ³⁴⁾, agniturum fuisse, sed potius, quod res est, dicturum, desperatâ causâ hoc vobis effugium quaesitum, ut quadratura vestra ad instar Protei ejusdem aliâ atque aliâ assumptâ formâ quantumlibet arctè sese constringentibus elaberetur. Verum age, inspiciamus jam quo rem deducas, posteaquam verbi *continere* novam significationem eliciuisti, eâque vetera theorematâ tam scitè interpolasti. In Corollario propositionis 40. lib. 10. quò tam saepè provocas ³⁵⁾, id unum egisse videris, unas ex aliis difficultates necendo, ut si quis argumentationis tuae tenorem consecuturicipiat, is defessus absistat priusquam ad finem pervenerit. Ego ad eum usque locum te secutus sum, ubi spatia Y & Z assumi jubes: lude non ulterius procedendum putavi. Adeò enim manifesto vicio atque *ἀγνομετηρία* ibi laborat constructio tua, ut tibi met ipsi exploratum id esse dubitare nequeam: sed quoniam aliâ evadendi ratio non occurrebat, sperasti, credo, in tanta obscuritate nemini illud facilè animadversum iri. Dein, inquis, *assumantur duo plana Hyperbolica Y & Z , rectis alteri asymptotorum parallelis inclusa* ³⁶⁾. Nullâ aliâ prae cautione assumuntur quam quod rectis alteri asymptotorum parallelis includi ea necesse sit. De magnitudine utriusque aut ratione quam inter se servare debeant nihil praecipis. Igitur quamlibet magnum aut parvum unumquodque eorum abscindi poterit. Mox tamen rationem spatii Y ad Z cum aliis rationibus comparare instituis, quas prius secundum certam determinationem assumpsisti, tibi que hoc demonstrandum proponis, *Rationem totalem planorum X ad T tam esse multiplicem rationis totalis planorum Y ad Z , quàm ratio totalis solidorum GH ad IK multiplicata est rationis totalis solidi LM ad NO* . Quidnam, quaeso, absurdius, quàm de quantitate ejus rationis aliquid enunciare, quae prorsus incerta sit ac vaga? Equidem ex hoc solo satis liquere puto, quàm frustra primae Quadraturae suppétias ferre tentaveris, cum in eo quod praecipuè tibi explicandum erat, tam insigniter delinquas. In tribus reliquis an meliore fortunâ usus sis, si me inquirere oporteat, talentum non meream. Id tamen scito perpetuum ad-

lubitu assumi, puta ut Y sit centuplo majus quam Z , vel millecuplo. Quid igitur demonstrari potest de ratione eorum totali, nempe rationem planorum X ad T tam esse multiplicem rationis planorum Y ad Z , quam ratio sol. GH ad IK multiplicata est rationis solidi LM ad NO : Quandoquidem prius plana X et T , uti et solida GH , IK , LM , NO certum magnitudinem habent; deinde vero Y et Z pro lubitu assumuntur? Sed non temerè horum determinationem autor omisit, verum ideo quod nulla dari possit absque insigni impudentia".

En vérité, la seule détermination des espaces Y et Z , présupposée par Aynscom, est celle-ci: „quae per inscriptionem figurarum eo modo sunt diuisa & exhausta, quo duo solida LM , NO , per inscriptionem paralelop. diuisa sunt & exhausta"; mais cela ne peut conduire à aucune construction exécutable.

Sur la page du titre, l'exemplaire mentionné porte, de la main d'Aynscom, l'inscription suivante: „Clarissimo viro domino Christiano Hugénio Auctor D. D."

cher si vous avez mieux réussi dans les trois autres, je n'y saurais trouver mon compte. Sachez seulement que je me servirai contre vous de cet argument perpétuel, que vous mêmes vous ne pouvez produire le rapport de la circonférence au diamètre que vous présentez comme donné par chacune des quadratures, ni l'auteur même de la Quadrature, ni tant de ces disciples qui depuis tant d'années s'y appliquent qu'en moins que cela Troie fut conquise. Euclide a défini un rapport comme connu, lorsqu' on peut trouver un autre qui lui est égal ³⁷). Or, qui peut croire que cela s'applique au vôtre, que vous cherchez en vain pendant toute une dizaine d'années ³⁸). Car si vous autres, vous estimez qu'il fustit que vous montriez le chemin au bout duquel on trouvera ce qui est demandé, sans toutefois écarter les obstacles et les innombrables difficultés qu'il présente, allez voir quel géomètre vous puissiez persuader que de cette manière le problème du Tetragonisme ³⁹) a été résolu par vous. Il est vrai que vous avez atteint au moins ceci que, n'allant pas plus loin, vous êtes moins exposés aux récriminations de tout le monde, plus difficilement aussi vous serez attaqués par les plus habiles, et trouverez plus promptement une riposte. Car il vous fera aisé d'envelopper ceux qui insisteront plus sérieusement des ténèbres de vos proportions et proportionnalités et de faire en sorte qu' enfin la nuit, pour ainsi dire, met fin au combat. J'ai craint et tâché d'éviter que cela même ne m'arrivât à moi lorsque j'écrivis l'examen de la Quadrature; m'appliquant à obtenir seulement ceci que, pour autant que cela fut possible, je réduisissè l'auteur à l'absurde savoir, qu'il avouerait soit de ne pas vouloir, soit de ne pas pouvoir achever sa Quadrature. Dans ce but j'ai calculé les dimensions de corps jusqu' alors inconnus et informes et ayant produit les rapports des deux premiers solides, je lui ai demandé qu'il en déduisît le troisième puisqu'il avait dit que les premiers étant donnés le troisième était connu ⁴⁰). Pour défendre celui qui se trouve ainsi réduit à l'étroit vous ne répondez rien d'autre qu'en me reprochant que je me suis arrogé à enseigner à votre auteur la manière de carrer le cercle et en m'exhortant ensuite de me rappeler *ce que* et *à qui* j'écris ⁴¹). Mais moi je n'ai ni enseigné, ni prescrit comment un cercle est carré; mais j'insiste sur ceci que celui qui prétend en avoir trouvé la manière montre de fait qu'elle est utile et réalisable. Ainsi donc je juge que maintenant il vous fera assez clair que je n'ai pas ignoré ni ce que ni dans quel but j'ai écrit. A qui j'ai écrit, je ne crois pas non plus l'avoir oublié. Quant à ce point voyez combien différentes sont la lettre de Descartes et les Eloges de vous et des vôtres; auxquelles des deux il faudrait plutôt s'attacher c'est ce que je préférerais laisser au jugement d'autres qu' imposer par le mien. Je voudrais seulement que l'Auteur de la Quadrature fût que mon opinion sur son érudition et sur sa candeur fera d'autant plus haute qu'il reviendra plus promptement sur son erreur.

Fait à la Haye, le 2 Oct. 1656.

versus vos argumentum fore, quod rationem peripheriae ad diametrum quam singulis quadraturis datam esse profiteremini, ipsi tamen exhibere non potestis; non autor ipse Quadraturae, non tot ejus discipuli, qui tot jam annis in id incumbunt, ut paucioribus illum expugnatum sit. Datam esse rationem, Euclides definivit, cui possumus aequalem invenire ³⁷⁾. Quis autem ad vestram illam hoc pertinere credet, quae irritò labore toto decennio ³⁸⁾ quaesita est? Nam quod suscitare existimatis si modò viam commonstraveritis quàm emensâ ad quaesitum perveniatur, obstacula verò, atque innumeras difficultates quibus praeccepta est, non removeritis, videte cui persuadere possitis, eâ ratione tetragonisimè negotium ³⁹⁾ à vobis confectum esse. Illud sanè vos consequi apparet, ut, dum ultra non proceditis, minis expositi sitis ad promiscuos omnium insultus, difficilior etiam à peritioribus oppugnemini, paratiorumque habeatis receptum. Facile enim acrius instantes proportionum & proportionalitatum vestrarum tenebris involvere potestis, atque efficere ut tandem veluti nox praelium dirimat. Hoc ipsum ne mihi eveniret, cum exetasin Quadraturae conferberem, metuebam, atque ut caverem operam dedi; id unum conatus, ut, quatenus fieri posset, autorem ad absurdum compellerem, nimirum ut vel nolle se vel non posse Quadraturam suam absolovere fateretur. Eo sine ignota priùs atque informia corpora dimensus sum, exhibitisque prioribus duabus solidorum proportionibus, petii ut inde tertiam eliceret, utpote quam cognitis illis notam dixisset ⁴⁰⁾. Ad quas angustias redactum non aliâ ratione defendis, quàm expostulando mecum quod auctori tuo modum praescribere praesumam quadrandi circulum, ac jubendo denique ut meminerim *quid & cui* scribam ⁴¹⁾. Ego verò quomodo quadratus fiat circulus, nec didici, nec praescribo; sed hoc urgeo, ut quem ille modum se invenisse contendit, eum reapse utilem & efficacem esse demonstraret. Atque ita, quid scripserim & in quem finem, me non nescivisse, satis jam tibi constare arbitror. Cui verò scripserim, ne hoc quidem puto me oblitum fuisse. Vides autem quam hac in parte longè diversum sonent Cartesii literae atque Elogia vestra: quorum utris potius subscribendum sit aliorum judicio decerni malim quàm meum interponere. Hoc tamen autorem Quadraturae scire velim, tanto majori eruditionis & candoris opinione apud me futurum, quântò maturiùs ab errore suo relinqueret. Vale.

Dat. Hagae - Com. 2. Oct. 1656.

³⁷⁾ Il s'agit de la deuxième „Definitio” des „Data” d'Euclide. Voir l'ouvrage cité dans la note 1, p. 138 du T. I.

³⁸⁾ C'est-à-dire depuis la publication de l'ouvrage de Grégoire en 1647.

³⁹⁾ La réduction du cercle au carré (*τετραγωνισμός*).

⁴⁰⁾ Voir la „Demonstratio” de la „Prop. 44”, p. 1126 du „Lib. 10”, où on lit: „Igitur cum notae sint prima, & secunda ratio, . . . etiam nota erit ratio corporis quod oritur ex ductu superficiei EHHM in HPPF ad corpus ortum ex ductu superficiei NKLO in KQRI. Consultez encore le § 7, p. 279 du T. XI, et, de plus, sur tout ce passage les p. 325—327 du T. XI.

⁴¹⁾ Voir le troisième alinéa de la p. 257 du Tome présent.

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

	Page.
TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1652 ET 1653. PROBLÈMES PLANS ET SOLIDES. MAXIMA ET MINIMA	1—89
AVERTISSEMENT.....	3—8
I. 1652. Couper une sphère donnée par un plan de manière que les segments aient entre eux la même proportion qu'une donnée	9
II. 1652. Etant donné en position un angle avec un point en dehors de cet angle, appliquer dans l'intérieur de ce dernier une droite de longueur donnée dirigée vers le point donné. Et comment Nicomède a trouvé deux moyennes proportionnelles au moyen de la Conchoïde	13
III. 1652. Diviser une sphère par un plan dans une proportion donnée, au moyen de la trisection de l'angle.....	16
IV. [1652]. Par un des sommets d'un carré donné tirer une droite de manière que la partie comprise entre les prolongements des deux côtés opposés soit égale à une droite donnée. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale du carré.....	19
V. 1652. Quelques règles de rédaction, servant à réduire, dans les démonstrations mathématiques, les relations tirées du calcul algébrique aux propriétés des proportions géométriques	21
VI. 1652. Par un point, donné en dehors d'un angle donné, mener une droite de manière que la partie comprise entre les côtés de l'angle soit égale à une droite donnée	26
VII. 1652. Par un des sommets d'un losange tirer une droite de manière que la partie comprise entre les prolongements des deux côtés opposés soit égale à une droite donnée. Solution obtenue au moyen de deux théorèmes relatifs aux propriétés d'un losange.....	32

VIII. 1652. Par un point, donné à l'intérieur d'un angle donné, mener une droite de manière que la partie comprise entre les côtés de l'angle soit égale à une droite donnée. Limite des solutions possibles.	38
IX. 1652. Même problème que celui sous VII. Solution différente.	42
X. 1652. Trouver un cube double d'un cube donné	45
XI. 1652. D'un point situé en dehors d'un angle, donné en position, mener une droite de manière que la partie comprise entre les deux côtés de l'angle soit égale à la distance du point d'intersection du premier côté à un point donné sur ce même côté	49
Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites données	50
Autre solution	51
XII. 1652. D'un point, situé en dehors d'un angle donné en position, mener une droite de manière que la distance du point d'intersection du second côté au sommet de l'angle soit égale à la distance du point donné au point d'intersection avec le premier côté.	54
Trouver deux moyennes proportionnelles	55
XIII. 1652. [PREMIÈRE PARTIE]. Étant donné un losange, dont un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur ainsi construit une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé	
[SECONDE PARTIE]. Étant donné un losange dont deux côtés contigus sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de longueur donnée qui passe par le sommet opposé	58
XIV. 1652. DE MAXIMIS ET MINIMIS.	
[PREMIÈRE PARTIE]. Exposition de la méthode de Fermat. Méthode inventée par Huygens.	61
[DEUXIÈME PARTIE]. Modification de la méthode de Fermat, appliquée au problème de faire passer par un point donné à l'intérieur d'un angle donné en position, une droite dont la partie comprise entre les côtés de l'angle soit aussi petite que possible.	65
[TROISIÈME PARTIE]. Démonstration d'une construction servant à la solution du problème cité	67
XV. 1653. Invention de la règle servant à exprimer l'aire d'un triangle en fonction des côtés.	69
XVI. 1653. Étant donnés en position un angle et deux points situés en dehors de l'angle mener par ces derniers deux parallèles qui découpent dans l'intérieur de l'angle une aire égale à un carré donné.	72
XVII. 1653. Invention de la tangente à la Cissoïde de Dioclès.	76
XVIII. 1653. Invention de la tangente à la Conchoïde à point de rebroussement	79
XIX. 1653. D'un point donné en dehors d'une parabole mener une normale à cette courbe.	81
XX. 1653. Trouver le point d'inflexion dans la Conchoïde de Nicomède	83

XXI. 1653. Détermination du centre de gravité d'après la méthode de van Schooten s'appliquant aux aires planes ou aux solides de telle nature que, dans un fegment découpé par une section parallèle à la base, le centre de gravité divise le diamètre dans la même proportion que dans la figure donnée le diamètre entier.	87
DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA. ACCEDUNT PROBLEMATUM QUORUNDAM ILLUSTRUM CONSTRUCTIONES. 1654.	
[SUR L'INVENTION DE LA GRANDEUR DU CERCLE AVEC LES CONSTRUCTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES CÉLÈBRES]	91—215
AVERTISSEMENT	93—112
TITRE EN FACSIMILE	113
PRÉFACE	114—119
SUR L'INVENTION DE LA GRANDEUR DU CERCLE.	121—181
Théor. I. Propof. I. Si dans un fegment de cercle, moindre que la moitié du cercle, on inferit le plus grand triangle possible, et pareillement des triangles dans les segments restants, le triangle décrit en premier lieu fera moindre que le quadruple de la somme des deux décrits dans les segments restants	120
Théor. II. Propof. II. Soient donnés un fegment moindre que la moitié du cercle, et sur sa base un triangle dont les côtés sont tangents au fegment; soit tirée de plus une droite tangente au fegment dans son sommet; cette droite coupera du triangle nommé un triangle plus grand que la moitié du plus grand triangle que l'on puisse inferir dans le fegment	122
Théor. III. Propof. III. Tout fegment de cercle, moindre que la moitié du cercle, est au plus grand triangle inscrit dans un rapport plus grand que quatre à trois.	122
Théor. IV. Propof. IV. Tout fegment de cercle, plus petit que la moitié du cercle, est moindre que les deux tiers du triangle qui a la même base et dont les côtés touchent le fegment	126
Théor. V. Propof. V. Tout cercle est plus grand qu'un polygone à côtés égaux, qui lui est inscrit, plus le tiers de la quantité dont ce polygone surpasse un autre polygone inscrit d'un nombre de côtés réduit à la moitié	128
Théor. VI. Propof. VI. Tout cercle est plus petit que les deux tiers du polygone à côtés égaux que lui est circonscrit, plus le tiers du polygone semblable inscrit	130
Théor. VII. Propof. VII. Toute circonférence de cercle est plus grande que le périmètre du polygone à côtés égaux qui lui est inscrit, plus le tiers de la quantité dont ce même périmètre surpasse le périmètre d'un autre polygone inscrit duquel le nombre des côtés est la moitié.	132
Théor. VIII. Propof. VIII. Un cercle étant donné, si à l'extrémité du diamètre on mène une tangente, et que l'on tire aussi de l'extrémité opposée du diamètre une droite qui coupe la circonférence et rencontre la tangente menée: les deux tiers de la tangente interceptée avec le tiers de la droite qui, à partir du point d'intersection, tombe à angles droits sur le diamètre, seront ensemble plus grands que l'arc découpé adjacent	134

Théor. IX. Propof. IX. Toute circonférence de cercle eft plus petite que les deux tiers du périmètre d'un polygone à côtés égaux qui lui eft inferit plus le tiers du périmètre du polygone femblable circonferit.	136
Probl. I. Propof. X. Trouver le rapport de la périphérie au diamètre, aufli proche que l'on veut du vrai	138
Probl. II. Propof. XI. Prendre une droite égale à la périphérie d'un cercle donné. Autre folution du même problème.	142
Troisième folution du même problème	144
Probl. III. Propof. XII. Prendre une droite égale à un arc quelconque donné. . . .	146
Théor. X. Propof. XIII. Le côté d'un polygone équilatéral inferit dans un cercle eft moyen proportionnel entre le côté du polygone femblable circonferit, et la moitié du côté du polygone inferit dont le nombre des côtés eft la moitié. . . .	148
Lemme. Le rapport de la moitié d'une droite, à cette moitié diminuée d'une partie eft plus grand que la troifième puiffance du rapport de trois moitiés, auxquelles on a ajouté la partie nommée, à trois moitiés	148
Théor. XI. Propof. XIV. Toute circonférence de cercle eft moindre que la plus petite de deux moyennes proportionnelles entre les périmètres de polygones femblables, dont l'un eft régulièrement inferit dans le cercle, l'autre circonferit. Et le cercle eft plus petit que le polygone, femblable à ceux-là, dont le contour eft égal à la plus grande des moyennes.	150
Théor. XII. Propof. XV. Si entre le prolongement du diamètre d'un cercle et la circonférence on place une droite égale au rayon, et que cette droite prolongée coupe le cercle et rencontre la droite touchant le cercle à l'autre extrémité du diamètre: cette droite découpera de la tangente une partie plus grande que l'arc adjacent découpé	156
Théor. XIII. Propof. XVI. Si au diamètre d'un cercle on ajoute dans fa direction un demi-diamètre, et qu' à partir de l'extrémité de la droite ajoutée on mène une droite qui coupe le cercle, et rencontre la droite qui touche le cercle à l'extrémité oppofée du diamètre: cette droite interceptera fur la tangente une partie plus petite que l'arc adjacent découpé.	158
Théor. XIV. Propof. XVII. Le centre de gravité d'un fegment de cercle divifé le diamètre de ce fegment de telle maniere que la partie au fommet eft plus grande que l'autre, et plus petite que une et demie fois cette autre	162
Théor. XV. Propof. XVIII. Un fegment de cercle plus petit qu' un demi-cercle eft au triangle maximum inferit dans un rapport plus grand que quatre à trois; mais plus petit que celui de trois et un tiers fois le diamètre du fegment refant au diamètre du cercle augmenté du triple de la droite qui, à partir du centre du cercle, atteint la bafe du fegment	166
Théor. XVI. Propof. XIX. Un arc quelconque, plus petit qu' une demi-circonférence, eft plus grand que fa corde augmentée du tiers de la différence dont la corde dépaffe le finus. Mais un tel arc eft plus petit que la corde prife avec la	

droite qui est au dit tiers comme le quadruple de la corde joint au finus est au double de la corde avec le triple du finus	168
Problème IV. Proposé. XX. Trouver le rapport de la circonférence au diamètre; et au moyen des cordes données inscrites dans un cercle donné trouver la longueur des arcs auxquels elles sont sous-tendues	172
CONSTRUCTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES CÉLÈBRES	182 - 215
Probl. I. Couper une sphère donnée par un plan de manière que les segments soient entre eux dans un rapport donné	182
Lemme. Lorsqu'un arc de circonférence est coupé en trois parties égales, l'ensemble des trois droites qui sont sous-tendues aux parties égales est égal à la sous-tendue de l'arc entier avec une droite qui est à la sous-tendue du tiers comme le carré de celle-ci au carré du demi-diamètre	186
Probl. II. Trouver un cube double d'un cube donné	188
Probl. III. Trouver deux moyennes proportionnelles à deux droites données	190
Autre solution du problème	194
Troisième solution du problème	196
Probl. IV. Étant donné un carré dont l'un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé.	198
Probl. V. Étant donné un carré dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de longueur donnée qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale du carré	198
Probl. VI. Étant donné un losange dont l'un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de longueur donnée qui passe par le sommet opposé	200
Probl. VII. Étant donné un losange dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de longueur donnée qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale qui joint les deux autres sommets du losange	204
Autre solution des deux problèmes précédents	206
Probl. VIII. Trouver dans une conchoïde les limites de la courbure contraire	211
APPENDICE I. SEPTEMBRE 1657.	
Comment, au moyen d'une ellipse donnée quelconque, on peut trouver deux moyennes proportionnelles entre deux données. Et comment la construction se simplifie lorsque le demi grand-axe est le triple de l'ordonnée du foyer	217
APPENDICE II. [1657]	
Comment les Anciens ont trouvé les constructions qui s'opèrent par l'intersection de deux sections coniques	222
APPENDICE III. [JUILLET 1659]	
[PREMIÈRE PARTIE]. De l'invention de deux moyennes proportionnelles. Recherche des solutions données par de Sluse	225

[DEUXIÈME PARTIE]. Recherche de la solution de de Sluse du problème : Dans une droite donnée, dans laquelle est donné un point, trouver un second point situé de manière que le carré de la distance de l'une des extrémités de la droite au premier point soit au carré de la distance des deux points comme cette dernière distance à celle entre le second point et l'autre extrémité	229
[TROISIÈME PARTIE]. Recherche de la solution de de Sluse du problème : étant données deux droites P et Q trouver une troisième au carré de laquelle le carré de P a le même rapport que celui de la troisième à l'excès de celle-ci sur Q	230
QUATRIÈME PARTIE. Recherche de la trisection de l'angle à l'aide de l'intersection d'un cercle avec une hyperbole équilatère, telle qu'elle fut exécutée par de Sluse.	231
APPENDICE IV. [1659]. Nouvelle solution du problème de trouver le point d'inflexion dans la conchoïde.	
AD C. V. FRAN. XAVER. AINSCOM. S. J. EPISTOLA 1656.	239—277
AVERTISSEMENT.	241—247
RÉPONSE DE F. X. AINSCOM À L' <i>Εξέτασις</i> DE CHR. HUYGENS	248—261
TITRE DE LA LETTRE DE CHR. HUYGENS EN FACSIMILE.	263
TEXTE.	264—277



II. PERSONNES MENTIONNÉES.

Académie des Sciences. 106.

„ d'Oxford. 266, 267.

Anderfon (Alexander). 82.

Apollonius. 5, 7, 26, 43, 82, 107, 190, 191, 194, 195, 224.

Archimède. 3, 9, 11, 12, 14, 17, 76, 87, 88, 89, 93, 94, 95, 96, 102, 103, 116, 117, 124,
125, 138, 139, 140, 141, 142, 164, 165, 182, 183, 184, 185, 190, 191, 243, 244,
250, 251.

Auzout (Adrien). 244, 247, 271, 272, 273.

Ayncom (Franciscus Xaverius). 239, 242—277.

Berckel (Abraham van). 80.

Bie (Alexander de). 99.

Blondel (François). 99.

Briene (C. de). 99.

Briggs (Henry). 94.

Carcavy (Pierre de). 99.

Cartes (René des). 4, 5, 8, 61, 62, 63, 65, 76, 79, 80, 84, 85, 101, 103, 106, 111, 117,
118, 119, 192, 193, 226, 230, 233, 234, 235, 270, 271—277.

Ceulen (Ludolf van). 93, 95, 140, 141.

Chanut (Pierre de). 99, 118.

Cicéron. 241.

Clavius (Christoffel). 11, 17, 22, 29, 46, 55, 66, 69, 125, 160, 161, 184, 185, 190, 196, 197,
198, 199, 208, 209.

Clerfeliér (Claude). 118.

Coets (Henryck). 111, 236.

Collier (Jooft van). 93.

Colvius (Andreas). 99.

Commandinus (Fredericus). 31, 38, 39, 41, 82, 210, 211.

- Compagnie de Jésus. 266, 267.
 Cufa (Nicolaus de). 95.
 Dioclès. 12, 76, 102, 182, 183, 190, 191.
 Dionysidore. 12, 102, 182, 183.
 Dneq (Ic). 99.
 Elifabeth, Princesse Palatine. 99, 118.
 Elzevier (Daniel). 113.
 „ (Johannes). 113, 246.
 Euclide. 11, 12, 17, 18, 29, 30, 35, 46, 55, 66, 69, 124, 125, 160, 161, 184, 185, 190, 191
 196, 197, 198, 199, 208, 209, 276, 277.
 Eutocius. 3, 12, 14, 15, 76, 102, 103, 104, 182, 183, 190, 191.
 Fermat (Pierre de). 6, 60, 65, 66, 79, 99.
 Fine (Oronce). 97, **156**, 157.
 Ghetaldi (Marino). 20, 107, 108, 109.
 Golius (Jacobus). 97, 99.
 Grégoire de Saint-Vincent. 9, 10, 97, 99, 241—277.
 Gregory (James). 100, 174.
 Gutshoven (Gerard van). 99, 246, 266, 267.
 Halley (Edmund). 94.
 Heiberg (J. L.). 3, 9, 11, 12, 14, 17, 76, 93, 102, 103, 104, 164, 183, 184, 185, 190, 191.
 Hérigone (Pierre). 107.
 Héron. 8, 40, 41, 63, 69, 190, 191.
 Heuraet (Hendrik van). 110, 111, 112.
 Hobbes (Thomas). 99.
 Hultsch (Fridericus). 13, 14, 31, 38, 39, 82, 86, 210, 211.
 Huygens (Constantyn, père). 118, 120, 121.
 „ (Philips, frère). 76, 218).
 Kinner von Löwenturm (Gottfried Aloys). 7, 16, 52, 97, 99, 184, 242, 243, 244, 247.
 Kraen. 99.
 Lanfbergen (Philippus van). 95.
 Leopold d'Autriche. 105.
 Leotaudus (Vincentius). 244, 247.
 Lipstorp (Daniel). 96.
 Longomontanus (Christiaan Severin). 176, 177.
 Marci de Kronland (Johannes Marcus). 97, 98.
 Marcus (Jacob). 93.
 Maybaum. Voyez Meibomius.
 Meibomius (Marcus). 247.
 Ménechme. 104, 222, 223, 224.
 Merfenne (Marin). 192, 193, 247, 271.
 Milll (J. F. van). 225.

- Montbéliard (Pr. de). 99.
 Moray (Robert). 99.
 Mount (William). 94.
 Mylon (Claude). 99.
 Newton (Isaac). 94.
 Nicomède. 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 40, 41, 79, 83, 86, 101, 103, 191, 192, 193, 210, 211.
 Nonius. 156.
 Omnifanctus. 95.
 Page (Thomas). 94.
 Paige (Ie). 105.
 Pappus. 5, 7, 13, 15, 20, 26, 31, 38, 39, 82, 86, 106, 107, 108, 110, 190, 191, 198, 199, 210, 211.
 Pell (John). 47.
 Philon le Byzantin. 190, 191.
 Roberval (Gilles Perfonne de). 246, 271, 272.
 Sarafâ (Alphonfus Antonius de). 99, 242, 246, 247, 256, 257, 259, 270, 271.
 Schooten (Frans van). 5, 8, 19, 21, 26, 28, 34, 36, 57, 60, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 96, 97, 98, 99, 100, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 201, 205, 206, 214, 233, 242, 246, 272, 273.
 „ (Pieter van). 5.
 Schuh (F.). 174.
 Seghers (Daniel). 246, 264, 265.
 Sharp (A.). 93, 94.
 Sherwin. 93.
 Slufe (René François de). 63, 104, 105, 106, 111, 220, 224, 225, 229, 230, 231.
 Snellius a Royen (Willibrordus). 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 117, 118, 119, 129, 148, 157, 159, 162, 163.
 Sportus. 190, 191.
 Stevin (Hendrik). 99.
 Stöckar (J. J.). 99.
 Sylvius (Alexius). 244, 247.
 Tacquet (Andreas). 99, 242, 246, 264, 265, 266, 267.
 Tannery (Paul). 4, 61, 65, 82, 84, 103, 193, 226, 230, 235, 273.
 Vascovanus (Michael). 157.
 Vienne. 105.
 Vieta (François). 24, 192, 193.
 Vlacq (Adriaen). 246.
 Waldkirch (Heinrich). 177.
 Wall (van der). 99.
 Wallis (John). 94, 246, 266, 267.
 Witt (Johan de). 105.

III. OUVRAGES CITÉS.

- Al. Anderson*, Exercit. Mathemat. Decas prima, 1619. 82.
Apollonius Pergacus, Conicorum Libr. 4. Ed. F. Commandinus. 1566. 7, 82, 194, 195.
Archimedis, Opera. Adj. Eutocii Ascolon. Commentaria. 1544. 3, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 76, 102, 103, 104, 124, 164, 182, 183, 184, 185, 190, 191, 192, 222, 243, 244.
„ Opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg, 1668—81. 3, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 76, 93, 102, 103, 104, 124, 138, 164, 182, 183, 184, 185, 190, 191, 192, 222, 243, 244.
A. Anzout, Tractatus de Rationibus. 247.
Fr. Nav. Lynceum, Expofitio ac Deductio geometrica, 1656. 244—275.
M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I. Dritte Aufl. 1907. 191.
R. des Cartes, Geometria. Ed. Fr. à Schooten, 1659. 106, 111.
„ Géométrie. 1637. 61, 101, 103.
„ Euvres. éd. de Charles Adam et Paul Tannery, 4, 61, 62, 65, 82, 84, 85, 103, 119, 193, 226, 234, 235, 272, 273.
„ Opuscula posthuma, physica et mathematica, 1701. **118**, 119.
L. van Ceulen, De Arithmetische en Geometrische fondamenten, 1615. **93**, 141.
„ Van den Cirkel. 1596. 93.
N. de Cuse, Opera, Ed. J. Faber Stapulensis, 1514. 95.
Euclidis, Data. Ed. Cl. Hardy, 1625. 276, 277.
„ Elementorum Libri XV. Aut. Chr. Clavio, 1607. 11, 17, 22, 29, 30, 35, 46, 55, 66, 69, 124, 125, 160, 161, 190, 191, 196, 197, 198, 199, 208, 209.
O. Finæus, De rebus mathematicis hætenus delideratis, Libri IIII, 1556. **157**.
„ Protomathesis, 1532. 157.
„ Quadratura circuli demonstrata. 1544. 97, **156**, 157.
M. Ghetaldus, Apollonius redivivus, 1607. 20, 107, 108, 109.

- M. Ghetaldus*, De Resolutione et Compositione mathematica libri quinque, 1640. 108, 109.
- Gregorius à St. Vincentio*, Opus Geometricum, Quadratura Circuli et Sect. Coni. 1647. 11, 242, 243, 245, 248—277.
- P. Hérigone*, Cursus mathematicus Nova, 1634—44. 107, 109.
- Chr. Huygens*, Ad C. V. Fran. Xav. Ainscom, S. I. Epistola. 246, 247.
- „ Confructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos locos. 106, 244.
- „ Contributions aux Commentaires de Van Schooten sur la Geometria Renati Descartes. 233.
- „ De Circuli Magnitudine Inventa, acc. illustr. quorundam problematum constructiones. 1654. 4, 6, 7, 16, 19, 26, 28, 29, 34, 36, 37, 45, 46, 47, 49, 51, 52, 54, 57, 83, 86, 91, 98, 100, 101, 103, 104, 106, 110, 113—217, 222, 232.
- „ Demonstratio regulae de maximis et minimis. 6, 7, 8, 60, 234.
- „ Exercitatio Cyclometriae etc., 1651. 241, 242, 245, 247, 248—261, 264, 265, 267, 268, 269, 272, 273, 276, 277.
- „ Méthode pour construire les Équations cubiques, etc. 1680. 106.
- „ Theoremata de Quadratura hyperbolis, elliptis et circuli. 96, 163, 166, 167.
- „ Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653. 100, 101, 103, 110.
- G. A. Kinner à Löwenthorn*, Elucidatio geometrica Probl. Austr. 1653. 243, 247.
- Phil. Lanfbergen*, Cyclometriae novae libri duo, 1616. 95.
- V. Leotaud*, Cyclomathia seu multiplex Circuli contemplatio, 1663. 247.
- „ Examen Circuli Quadraturae celeb. 1655. 247.
- Chr. S. Longomontanus*, Cyclometria ex Lunulis reciproce demonstrata, 1612. 177.
- M. Marci de Kronland*, Labyrinthus seu via ad circuli quadratura, 1654. 97.
- M. Meibomius*, De Proportionibus Dialogus, 1655. 247.
- M. Merfenne*, Harmonicorum Libri, II Vol., 1648. 192.
- „ Novae Observat. Physico-Mathemat. 1647. 247.
- Nonius*, De Erratis Orontii Finaci, 1546. 156.
- Paige*, Correspondance de De Sluse, 1884. 105.
- Pappi Alexandrini*, Mathematicae Collectiones, Ed. F. Commandinus, 1588. 5, 15, 20, 26, 31, 38, 39, 41, 43, 82, 86, 107, 198, 199, 210, 211.
- „ Collectionis quae super sunt. Ed. Fr. Hultsch. 1877. 13, 15, 31, 38, 39, 41, 82, 86, 210, 211.
- J. Pell*, Controverbia de vera Circuli mensura, 1647. 47, 176, 177.
- A. A. de Sarajá*, Solutio Problematis a R. P. M. Merfenne propositi, 1649. 242, 246, 247, 256, 257, 258, 259, 270, 271.
- Fr. a Schooten*, Excercitationum Mathematicorum Libri V. 1657. 87, 88.
- „ Tractatus de concinnandis Demonstrationibus geometricis ex Calculo algebrico. 1661. 5, 21.
- F. Schuh*, Sur quelques formules approximatives de la circonférence du cercle et sur la Cyclo-métrie de Huygens. 174.

Sherwin, Mathematicat Tables, contriv'd after a most comprehensive Method. 1705. **93**, 94.

R. F. Staffus, Mefolabum, 1659. 105, 224, **225**, 229, 230, 231.

„ Mefolabum. Acc. de Analyti et Miscellanea, 1668. 104, 105, 106, 224, 229, 230, 231.

„ Correspondance. Voyez *Paige*.

W. Snellius, Cyclometricus. De circuli dimensione. 1621. 93, **94**, 118, 119, 148, 157, 158, 159, 162, 163.

J. Sylyius, Lunae Circulares Periodi, 1651. 247.

Fr. Ticta, Opera Mathematica. Ed. Fr. à Schooten, 1646. 24, 192.

J. Wallis, Arithmetica Infinitorum, 1656. 246, 266, 267.

Archives Néerlandaises. 174.



IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Dans cette Table les matières scientifiques traitées dans ce Volume XII ont été groupées sous divers articles généraux, savoir :

Algèbre.	Mécanique.	Trigonométrie.
Arithmétique.	Œuvres.	
Géométrie.	Optique.	

Pour connaître tous les endroits où quelque sujet est traité, on cherchera dans la Table l'article général auquel il appartient. On y trouvera, soit du sujet même, soit d'un sous-article qui devra y conduire, la nomenclature adoptée dans l'ordre alphabétique de la Table.

Les chiffres indiquent les pages.

On a marqué d'un astérique les endroits qui ont été jugés les plus importants.

L'article *Œuvres* se rapporte aux écrits de Huygens, soit publiés, ici ou ailleurs, soit seulement ébauchés.

ALGÈBRE. (voir *Emploi de l'analyse algébrique par les anciens pour la solution des problèmes géométriques, Équations algébriques, Exposants incommensurables, Logarithmes, Maxima et minima, Principes du calcul différentiel et intégral, Rédaction à la mode des anciens des problèmes géométriques résolus par l'analyse algébrique, Suites géométriques*).

APPLICATION DE LA THÉORIE DU CENTRE DE GRAVITÉ A LA QUADRATURE APPROCHÉE DU CERCLE.

96*—98*, 115*, 117*, 163*—171*, 173*, 175*.

ARITHMÉTIQUE. (voir *Calcul du nombre Π , Suites géométriques*).

CALCUL DU NOMBRE Π . 93*—100*, 115, 117*, 119*, 129*, 131*, 135*, 136*, 139*, 141*, 143*, 159*, 166*, 168*, 169*, 173*, 175*, 177*, 179*, (voir *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée du cercle*).

CENTRE DE GRAVITÉ. (voir *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée du cercle, Méthode de van Schooten pour trouver les centres de gravité de certaines*

figures simples). D'un arc de cycloïde 99*; d'un segment de cercle 163, 165, 167; d'un segment de parabole 87—89, 97; d'un segment elliptique ou hyperbolique (voir *Œuvres*: Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro); du triangle 8.

CERCLE. (voir *Centre de gravité, Propriétés des polygones réguliers inscrits et circonscrits, Quadrature de surfaces planes, Redification approchée d'un arc de cercle, Triangle*).

CISSOÏDE. (voir *Tangentes*).

CONCHOÏDE. 4*, 5*, 13—15; (voir *Œuvres*: Illustrium quorundam problematum constructiones, *Tangentes*).

CONIQUES. (voir *Cercle, Hyperbole, Parabole*).

CONSTRUCTION DU PLUS PETIT SEGMENT QUE, DANS UN ANGLE DONNÉ, ON PUISSE FAIRE PASSER PAR UN POINT DONNÉ. 6*, 35, 36, 39*—41*.

CONSTRUCTIONS (voir *Problèmes divers, Redification approchée d'un arc de cercle, Résolution par construction des équations algébriques*).

COURBES. (voir *Cercle, Cissoïde, Conchoïde, Coniques, Cycloïde, Normales, Tangentes*).

CUBATURE. (voir *Cubature des solides de révolution*). De l'onglet parabolique 259, 261, 269*; des solides de l'Exetasis. 249, 251, 255, 257, 269, 277.

CUBATURE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION. Du secteur sphérique 11, 17, 185; du segment sphérique 11, 12, 18, 185, 187.

CYCLOÏDE. (voir *Centre de gravité, Recherches de Huygens sur la cycloïde*).

DUPLICATION DU CUBE. (voir *Œuvres*: Illustrium quorundam problematum constructiones). Solution approximative 6*, 46*—48*, 102*, 189*.

DYNAMIQUE. (voir *Œuvres*: Regulae de motu corporum ex percussione).

EMPLOI DE L'ANALYSE ALGÈBRE PAR LES ANCIENS POUR LA SOLUTION DES PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES. 5*, 13*—15*, 222*—224*.

ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES. (voir *Équations cubiques et biquadratiques, Résolution par construction des équations algébriques*). Racines égales 61*, 62*, 63—65.

ÉQUATIONS CUBIQUES ET BIQUADRATIQUES. 101*, 111, 219, 232—234, 235*; (voir *Problèmes solides menant à des équations cubiques ou biquadratiques*).

EXPOSANTS INCOMMENSURABLES. 245, 246*.

FORMULE DE HÉRON POUR L'AIRES DU TRIANGLE EN FONCTION DES CÔTÉS 8, 69—71.

GÉOMÉTRIE. (voir *Calcul du nombre π , Centre de gravité, Constructions, Courbes, Cubature, Emploi de l'analyse algébrique par les anciens pour la résolution des problèmes géométriques, Géométrie cartésienne, Maxima et minima, Normales, Œuvres, Planimétrie, Points d'inflexion, Principes du calcul différentiel et intégral, Problèmes divers, Quadrature, Redification, Rédaction à la mode des anciens des problèmes géométriques résolus par l'analyse algébrique, Sphère, Stéréométrie, Tangentes*).

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE. 222—231; (voir *Emploi de l'analyse algébrique par les anciens pour la résolution des problèmes géométriques*).

GONIOMÉTRIE. 47, 48, 117, 163, 173, 179, 181*.

HYPÉRBOLÉ. (voir *Centre de gravité, Quadrature de surfaces planes*).

LOGARITHMES. 242, 245, 246.

MAXIMA ET MINIMA. (voir *Construction du plus petit segment que, dans un angle donné, on puisse faire passer par un point donné, Méthode de Fermat pour les maxima et minima, Méthode pour les maxima et minima fondée sur l'égalité de deux racines de l'équation qu'en obtient en égalant l'expression donnée à une constante, Œuvres: Demonstratio regulæ de maximis et minimis*).

MÉCANIQUE. (voir *Centre de gravité, Dynamique*).

MENER PAR UN POINT DONNÉ UNE DROITE DONT DEUX DROITES, DONNÉES EN POSITION, DÉCOUPENT UN SEGMENT DONNÉ. 5*, 6*, 13*, 14*, 26*, 27*, 38*—40*, 60*, 62*, 63*, 66*—68*; (voir *Construction du plus petit segment que, dans un angle donné, on puisse faire passer par un point donné, Œuvres: Illustrium quorundam problematum constructiones*).

MÉTHODE DE DESCARTES POUR LES NORMALES ET LES TANGENTES. 8*, 61, 65*, 76, 79, 80.

MÉTHODE DE FERMAT POUR LES MAXIMA ET MINIMA. 6*, 7, 8, 60*, 61*, 65*, 66*, 79.

MÉTHODE DE VAN SCHOOTEN POUR TROUVER LES CENTRES DE GRAVITÉ DE CERTAINES FIGURES SIMPLES. 8, 87*—89*.

MÉTHODE POUR LES MAXIMA DE MINIMA FONDÉE SUR L'ÉGALITÉ DE DEUX RACINES DE L'ÉQUATION QU'ON OBTIENT EN ÉGALANT L'EXPRESSION DONNÉE À UNE CONSTANTE. 61*—65*.

NORMALES. (voir *Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes, Œuvres: Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometrie Renati Descartes*). Mener les normales d'un point donné à une conique. 82, 224*.

ŒUVRES. *Theoremata de Quadratura hyperbolæ, ellipsis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro*. 96*, 163, 167*.

Exetasis Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio. 241*, 242*, 245*, 247*, 248*—261*, 263*—277*.

Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653. 1*—89*, 100*, 101*, 103, 110.

De circuli magnitudine inventa. 93*—100*, 101*, 113*—181*; (voir plus spécialement *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée du cercle, Calcul du nombre Π , Rectification approchée d'un arc de cercle, Trigonométrie*).

Illustrium quorundam problematum constructiones. 4—7, 16, 19, 26, 34, 28, 29, 36, 37, 45, 46, 47, 49, 51, 52, 54, 57, 83, 86, 91, 98*, 100*—112*, 182*—237*, (voir plus particulièrement pour les problèmes traités dans cet ouvrage: 1. *Datum sphaeram plano secare, ut portiones inter se rationem habeant datum*. 3*, 4*, 9*—12*, 16*—18*, 101*, 102*, 183*, 185*. 2. *Cubum invenire dati cubi duplum et 3. Datis duabus rectis duas medias invenire*. 4*, 6*, 13*—15*, 40, 41, 45*, 46*, 48*—56*, 63, 97, 101*—106*, 115, 151, 157, 189*, 191*, 193*, 195*, 197*, 217*—229*. 4. *Quadrato dato et uno latere producto, aptare sub angulo exteriori rectam magnitudine datum quæ ad angulum oppositum pertineat*. 5*, 38, 101, 103, 106*, 109*, 110*, 199*. 5. *Dato quadrato, et duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datum quæ per angulum oppositum transeat*. Oportet autem non minorem esse datum quam sit quadrati diameter dupla. 5*, 19*, 20*, 38, 39, 101, 103, 107*, 109*, 110*, 199*, 201*. 6. *Rhombo dato, et uno latere producto, aptare sub angulo exteriori lineam magnitudine datum quæ ad oppositum angulum pertineat*. 5*, 26*—31*, 38, 57*, 58*, 101*, 103*, 107*—110*, 201*, 203*, 207*, 209*. 7. *Rhombo*

dato et duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quae per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quae reliquos duos rhombi angulos conjungit. 5*, 32*—37*, 38, 39, 42*—44*, 58*, 59*, 101*, 103, 109*, 110*, 205*, 207*, 209*, 211*. 8. In conchoïde invenire confinia flexus contrarii. 7*, 83*—86*, 101*, 110*—112*, 211*, 213*, 232*—237*.

Ad C. F. Fran. Xav. Ainscom, S. I. Epistola. 239*—277*.

Dioptrica. 7*.

Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes. Construction de la normale à la conchoïde (ed. secunda 1659, p. 253), 233; mener les normales à la parabole d'un point donné (ed. secunda 1659, p. 322). 7*, 81*, 82*.

Demonstratio regulae de maximis et minimis 6*, 7, 8, 60*—67*, 77*, 79*, 84, 233, 234*.

Examen de „Vera circuli et Hyperboles Quadratura, in proprii sui proportionis specie inventa et demonstrata à Jacobo Gregorio Scoto, in 4^o. Patavii” (voir *Polémique avec Gregory sur sa „vera circuli et hyperboles quadratura”*).

Regulae de motu corporum ex mutuo impulsu. 7*.

Méthode pour construire les équations cubiques et quarréesquarrés et les résolvant en deux lieux. 106*, 222*—231*.

Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos locos. 106*, 222*—224*.

OPTIQUE. (voir *Œuvres*: *Dioptrica*).

PARABOLE. (voir *Centre de gravité, Œuvres*: *Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes*).

PERCUSSION. (voir *Œuvres*: *Regulae de motu corporum ex mutuo impulsu*).

PLANIMÉTRIE. 187, 188; (voir *Problèmes de planimétrie, Propriétés des polygones réguliers inscrits et circonscrits, Triangle*).

POINTS D'INFLXION. (voir *Œuvres*: *Illustrum quorundam problematum constructiones*).

POLÉMIQUE AVEC GREGORY SUR SA „VERA CIRCULI ET HYPERBOLES QUADRATURA.” 174*.

PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL (voir *Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes, Méthode de Fermat pour les maxima et minima, Méthode pour les maxima et minima fondée sur l'égalité des deux racines de l'équation qu'on obtient en égalant l'expression donnée à une constante, Œuvres*: *Demonstratio regulae de maximis et minimis, Recherches de Huygens sur la cycloïde*).

PROBLÈME DELIAQUE. (voir *Duplication du cube*).

PROBLÈME DU MÉSO LABE. 255 (voir *Duplication du cube*).

PROBLÈMES DE PLANIMÉTRIE. (voir *Œuvres*: *Illustrum quorundam problematum constructiones*).

Problèmes divers dépendant de la résolution d'une équation du second degré. 8, 72—75.

PROBLÈMES DIVERS. (voir *Duplication du cube, Normales, Problème du mésolabe, Problèmes de planimétrie, Problèmes solides menant à des équations cubiques ou biquadratiques, Problèmes solides résolus à l'aide d'une courbe tracée d'avance, Rédaction à la mode des anciens des problèmes géométriques résolus par l'analyse algébrique, Trisection de l'angle*).

PROBLÈMES SOLIDES MENANT À DES ÉQUATIONS CUBIQUES ON BIQUADRATIQUES. 3*, 4*, 6*, 38, 39, 49, 50, 54, 82*, 101*, 105*, 108*, 189, 222*, 229—231; (voir *Construction du plus*

petit segment que, dans un angle donné, on puisse faire passer par un point donné, Duplication du cube, Emploi de l'analyse géométrique par les anciens pour la solution des problèmes géométriques, Mener par un point donné une droite dont deux droites, données en position, découpent un segment donné, Normales, Œuvres: Illustrium quorundam problematum constructiones, Problèmes solides résolus à l'aide d'une courbe tracée d'avance).

PROBLÈMES SOLIDES RÉSOLUS À L'AIDE D'UNE COURBE TRACÉE D'AVANCE. 7*, 86*, 105*, 111*, 214, 217*, 221*, 233*—237*.

PROPRIÉTÉS DES POLYGONES RÉGULIERS INSCRITS ET CIRCONSCRITS. 94*, 149, 153*.

QUADRATURE DE SURFACES PLANES. Cercle 97, 243, 255; (voir *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée du cercle, Œuvres: Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro, Exetasis Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio, De circuli magnitudine inventa, Ad C. V. Fran. Xav. Ainfcom, S. I. Epistola, Polémique avec Gregory sur sa „vera circuli et hyperboles quadratura“*). Hyperbole 242, 245, 249; (voir *Œuvres: Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro, Polémique avec Gregory sur sa „vera circuli et hyperboles quadratura“*).

RECHERCHES DE HUYGENS SUR LA CYCLOÏDE. 99*, 100*.

RECTIFICATION. (voir *Rectification approchée d'un arc de cercle*).

RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE. 97*, 100*, 117*, 133, 135, 137, 139, 143*, 145*, 147*, 149*, 157, 159, 161, 169, 171, 175.

RÉDACTION À LA MANIÈRE DES ANCIENS DES PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES RÉSOLUS PAR L'ANALYSE ALGÈBRE. 8*, 21*—25*, 33, 73—75, 88, 89.

RÉSOLUTION PAR CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES. 4*, 5*, 7*, 82, 84*, 85*, 101*, 102*, 104*—106*, 222*; (voir *Duplication du cube, Œuvres: Méthode pour construire les équations cubiques et carrées carrées en les résolvant en deux lieux, Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos locos, Problèmes solides résolus à l'aide d'une courbe tracée d'avance, Trisection de l'angle*).

SPHÈRE. (voir *Cubature des solides de révolution, Œuvres: Illustrium quorundam problematum constructiones*).

STÉRÉOMÉTRIE. (voir *Cubature des solides de révolution*).

SUITES GÉOMÉTRIQUES. Somme 124.

TANGENTES. (voir *Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes*). Cissoïde 3, 76*—78*; Conchoïde 8, 79*, 83.

TRIANGLE. (voir *Centre de gravité, Formule de Héron pour l'aire du triangle en fonction des côtés*). Triangles inscrits et circonscrits d'un segment de cercle 121, 123, 125, 127, 167, 169.

TRIGONOMÉTRIE. 117, 163; (voir *Goniométrie*).

TRISECTION DE L'ANGLE. 4*, 7*, 16*—18*, 38, 85*, 86*, 101*, 102*, 104, 183*, 211*, 213*, 215, 230*, 231*.

Huygens, Christiaan
113 Œuvres complètes
H39
1888
t.12

P&A Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

